Wavelets - Übung

Felix Rohrer

>

Aufgabe 1: Der Funktionenraum L^2(R)

(a) Welche der folgenden Funktionen gehören zu $L^2(\mathbb{R})$? Es wird nicht verlangt, dass Sie die uneigentlichen Integrale auswerten; das wird schwerlich gelingen. Sie sollten abschätzen, mit welcher Grössenordung die Funktionswerte nach 0 streben, wenn $t \to \pm\infty$.

(i) $f(t) = \frac{1}{1+e^t}$

(ii) $g(t) = \frac{\sin(t)}{1+|t|}$

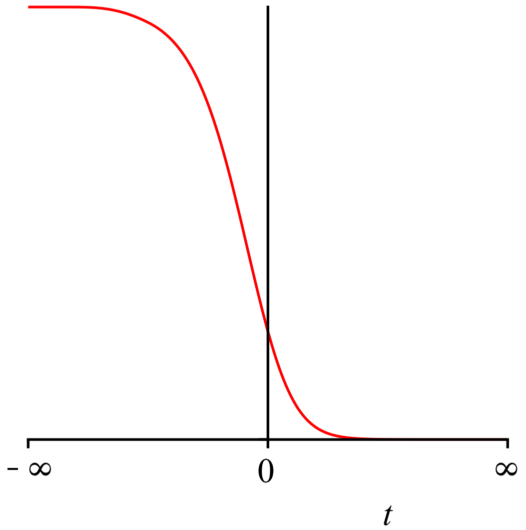
(iii) $h(t) = \frac{1}{1+\ln(1+t^2)}$

Antwort:

> *restart*

> $f := t \to \dfrac{1}{1+\exp(t)}$:

> $plot(f(t) \cdot \mathrm{f}(t), \mathrm{t} = -\mathrm{infinity}..\mathrm{infinity})$



> $evalf(int(f(t) \cdot f(t), \mathrm{t} = -infinity..infinity))$

$$Float(\infty) \tag{1.1}$$

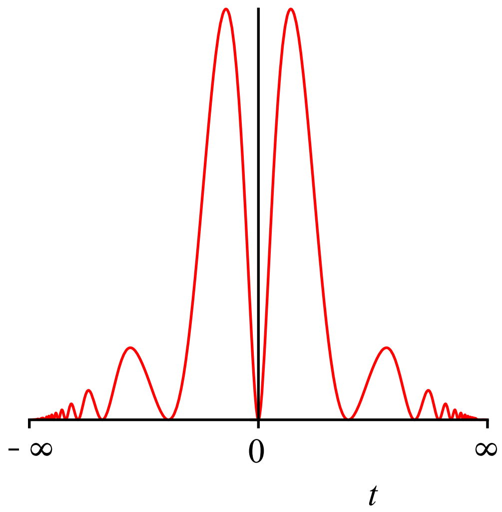
Bei t → ∞ wird der Funktionswert immer grösser. ==> divergent

II)

> *restart*

> $f := t \to \dfrac{\sin(t)}{1+\mathrm{abs}(t)}$:

> $plot(f(t) \cdot \mathrm{f}(t), \mathrm{t} = -\mathrm{infinity}..\mathrm{infinity})$



> $evalf(int(f(t) \cdot f(t), \mathrm{t}=-infinity..infinity))$

$$0.7980419764 \quad (1.2)$$

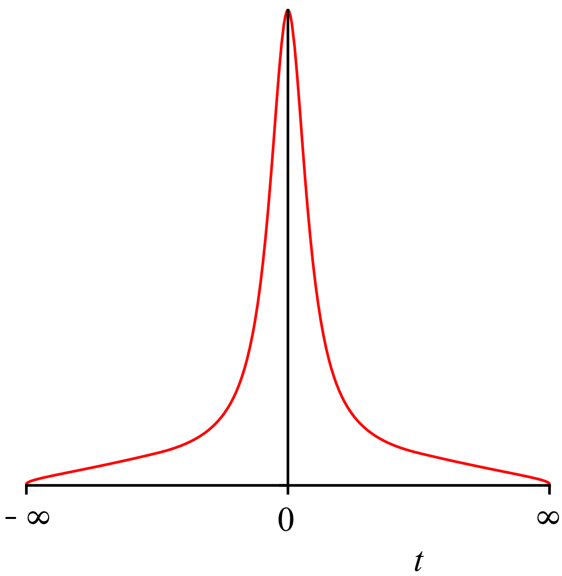
Bei t → ∞ wird strebt der Funktionswert richtung 0.798

III)

> *restart*

> $f := t \rightarrow \frac{1}{1+\ln(1+t^2)}$:

> $plot(f(t) \cdot \mathrm{f}(\mathrm{t}), \mathrm{t}=-\mathrm{infinity}..\mathrm{infinity})$



> $evalf(int(f(t) \cdot f(t), \mathrm{t}=-infinity..infinity))$

$$Float(\infty) \quad (1.3)$$

Bei t → ∞ wird der Funktionswert immer grösser. ==> divergent

(b) Die folgenden drei Funktionen gehören alle zu $L^2(\mathbb{R})$. Können Sie entscheiden, welche davon zueinander senkrecht stehen?

(iv) $u(t) = \sin(t) \cdot e^{-t^2}$

(v) $v(t) = \frac{20}{1+t^2}$

(vi) $w(t) = \arctan(\frac{t}{1+t^2})$

Antwort:

u(t) und w(t) sind ungerade, v(t) ist gerade. u(t) * v(t) und v(t) * w(t) sind dadurch ebenfalls ungerade Funktionen.

> *restart*

> $u := t \rightarrow \sin(t) \cdot \exp(-t^2)$:

> $v := t \rightarrow \dfrac{20}{1+t^2}$:

> $w := t \rightarrow \arctan\left(\dfrac{t}{1+t^2}\right)$:

> *evalf*(*int*(*u*(*t*)·*v*(*t*), *t* = −*infinity*..*infinity*))

$$0. \tag{1.4}$$

u(t) ist senkrecht zu v(t)

> *evalf*(*int*(*v*(*t*)·*w*(*t*), *t* = −*infinity*..*infinity*))

$$0. \tag{1.5}$$

v(t) ist senkrecht zu w(t)

> *evalf*(*int*(*u*(*t*)·*w*(*t*), *t* = −*infinity*..*infinity*))

$$0.3380564794 \tag{1.6}$$

u(t) ist _nicht_ senkrecht zu w(t)

Aufgabe 2

Die Funktion

$$y = f(t) = \frac{t^3}{4} - \frac{t^2}{2} - \frac{t}{4} + \frac{3}{2}$$

soll im Intervall $-1 \leq t \leq 3$ durch eine Treppenfunktion mit Breite $\Delta t = \frac{1}{4}$ approximiert werden. Gesucht ist ein MATLAB- oder ein MAPLE-Programm, welches

(1) in einer Schleife alle nötigen Rechtecksimpulse $u_{2,k}$ der Breite $\Delta t = \frac{1}{4}$ erzeugt,

(2) in einer Schleife die Koeffizienten

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} u_{2,k} * f(t)\,dt = \int_{k\cdot 1/4}^{(k+1)\cdot 1/4} 2 * f(t)\,dt$$

berechnet

(3) die Rechtecke zur Treppenfunktion $g(t)$ zusammenfügt und $f(t)$ zusammen mit $g(t)$ zeichnet.

Antwort:

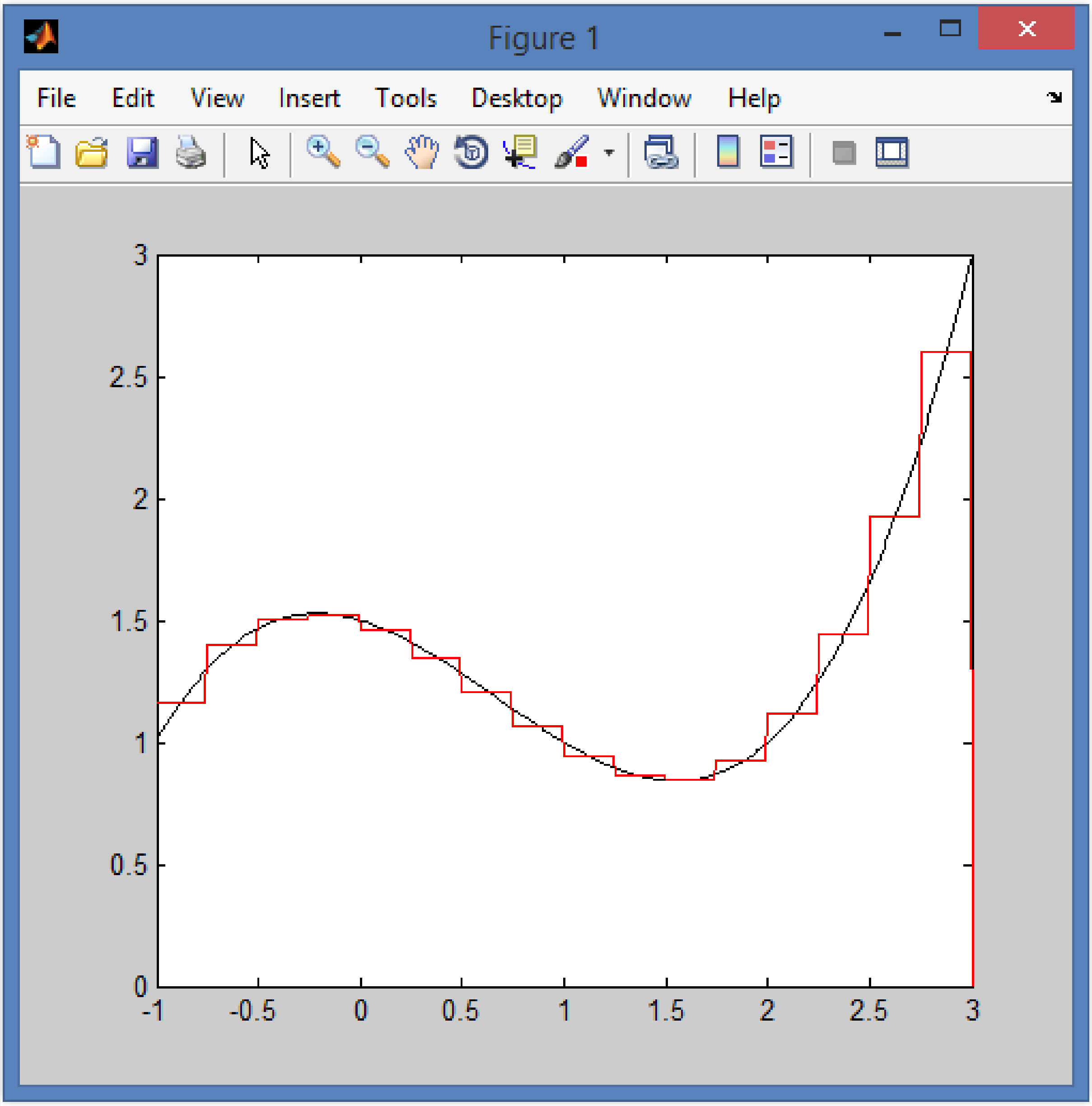
Mit MatLab gelöst.

```
function f = fnf(t)
f = 1/4*t.^3-1/2*t.^2-1/4*t+3/2;
end

function co = koeff(m,k,f);
co = 2^(-m/2)*quad(f,k*2^m,(k+1)*2^m,[1,0.001]);
```

```
function r = rechteck(m,k,t);
if (m==0) && (k==0)
    r = ((t>=0) & (t < 1));
else
    r = 2^(m/2)*rechteck(0,0,t*2^(-m)-k);
end;
```

```
>> t = [-1:0.01:3];
>> y1 = fnf(t);
>> y2 = 0;
>> for k=-4:1:11
y2 = y2 + koeff(-2, k, 'fnf').*rechteck(-2,k,t);
end;
>> plot(t,y1,'k',t,y2*4,'r')
```



Aufgabe 3

Wir betrachten nochmals die Kollektion $R = R_0 = \{r_k(t) \mid k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots\}$. Sie besteht aus dem Rechtecksimpuls $r_0(t)$ über dem über dem Intervall $0 \leq t \leq 1$ (mit Höhe 1) und allen daraus durch Parallelverschiebung entstehenden Rechtecken $r_k(t) = r_0(t-k)$. Durch Überlagern von Funktionen aus R ergeben sich Treppenfunktionen mit Breite $\Delta t = 1$. Nun fügen wir weitere Funktionen $q_k(t)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ hinzu. Sie entstehen aus

$$q_0(t) := \begin{cases} 2\sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{2} - t\right) & \text{falls } 0 \leq t < 1; \\ 0 & \text{für alle anderen } t. \end{cases}$$

durch Parallelverschiebung:

$$q_k(t) := q_0(t-k)$$

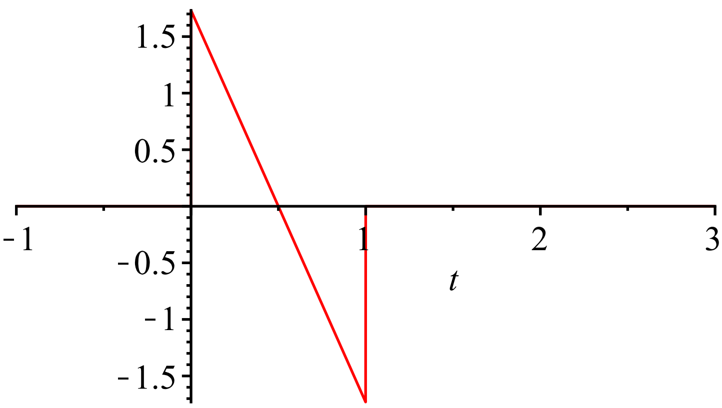
(1) Erzeugen Sie ein Bild der Ausgangsfunktion $q_0(t)$.

(2) Die Menge RQ bestehend aus allen Funktionen $r_k(t)$ und allen $q_k(t)$ ist ein Orthonormalsystem. Geben Sie eine knappe, schlüssige Begründung für diese Behauptung.

(3) Die Funktion $y = f(t) = \sin(\frac{\pi}{8} \cdot t)$ soll im Intervall $0 \leq t \leq 6$ durch eine Überlagerung von Funktionen aus RQ bestmöglich approximiert werden. Schreiben Sie ein Programm, welches die Koeffizienten berechnet und die Funktion f zusammen mit der Näherungsfunktion zeichnet. Was stellen Sie fest?

Antwort

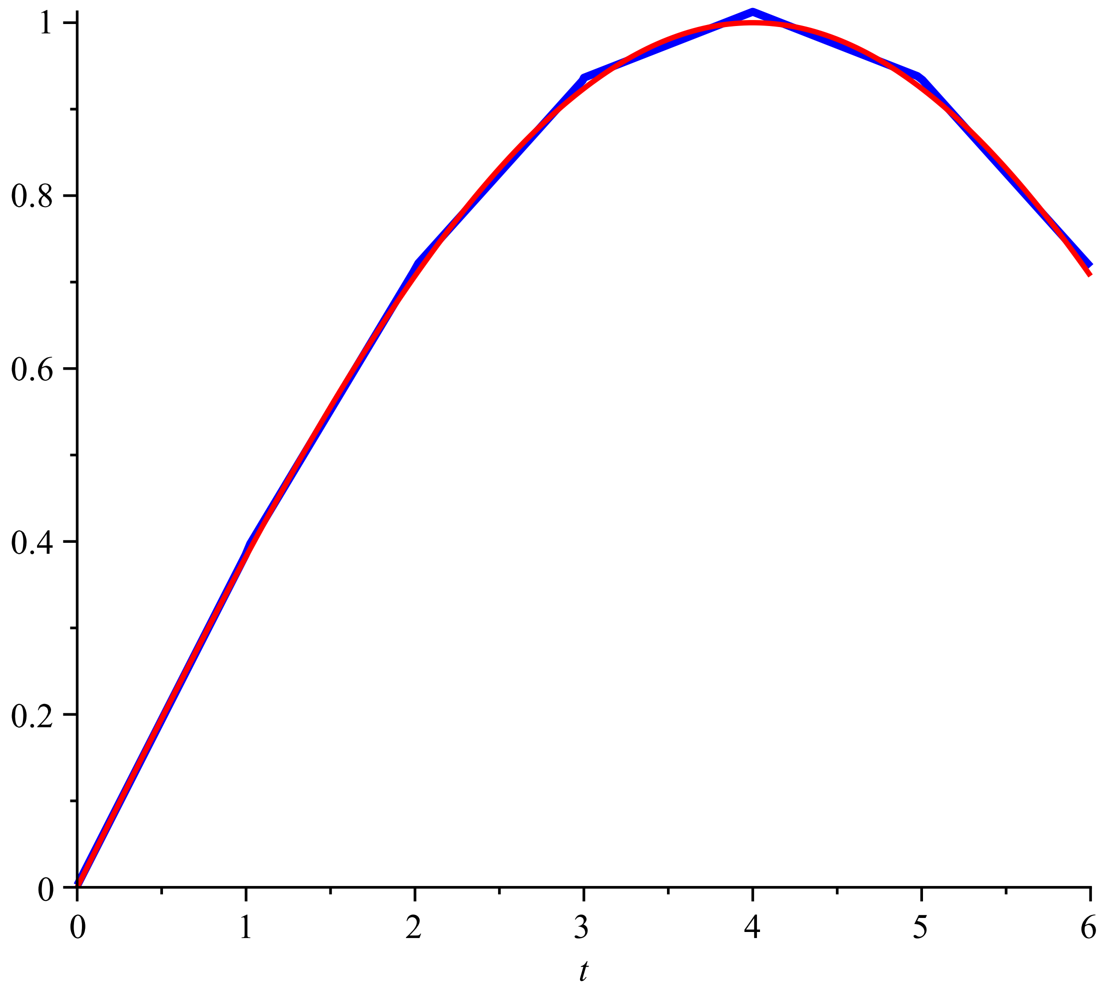
```
> restart
> r := Heaviside(t) - Heaviside(t - 1) :
> q := 2·sqrt(3)·(1/2 - t)·r :
> plot(q, t = -1 ..3)
```




```
> f := sin(Pi/8 · t)
```

$$f := \sin\left(\frac{1}{8}\pi t\right) \tag{3.1}$$

```
> for k from 0 to 5 do
   c[k] := int(f, t = k..k + 1);
   d[k] := 2·sqrt(3)·int(f·(0.5 - t + k), t = k..k + 1)
   end:
> approx := sum(c[j]·subs(t = t - j, r) + d[j]·subs(t = t - j, q), j = 0 ..5) :
> plot({f, approx}, t = 0 ..6, thickness = [3, 2], color = [blue, red])
```



>

Aufgabe 4

Wir betrachten eine Funktion $y = f(t)$ mit einer Sprungstelle

$$f(t) := \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) & \text{falls } 0 \le t < 1, \\ -\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) & \text{falls } 1 \le t < 2, \\ 0 & \text{für alle anderen } t. \end{cases}$$

(1) Plotten Sie den Graphen.

(2) Berechnen Sie eine Näherungsfunktion $g_1(t)$ mit Hilfe der Haar wavelets. Verwenden Sie die Terme mit den 25 betragsgrössten Koeffizienten.

(3) Setzen Sie die Funktion f periodisch fort, berechnen Sie eine Näherungsfunktion $g_1(t)$ basierend auf der Fourier Reihe. Verwenden Sie auch hier die Terme mit den 25 betragsgrössten Koeffizienten.

(4) Vergleichen Sie die beiden Approximationen.

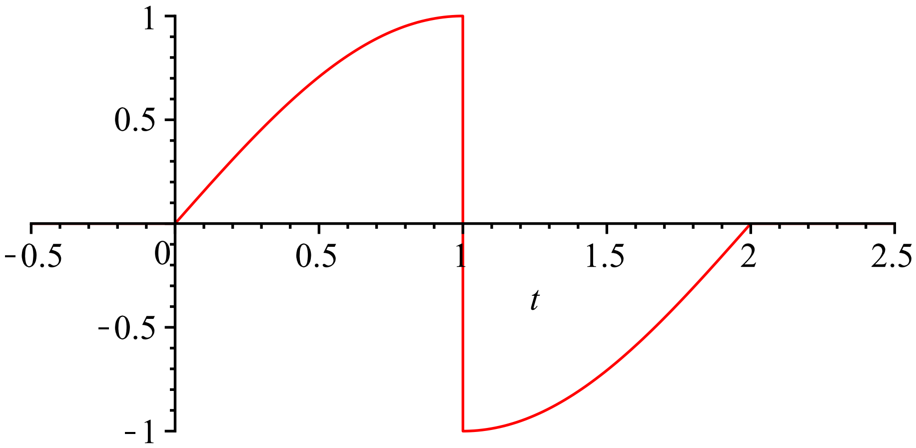
Antwort

> *restart* :

> $f := (\text{Heaviside}(t) - \text{Heaviside}(t-1)) \cdot \sin\left(\frac{\text{Pi}}{2} \cdot t\right) - (\text{Heaviside}(t-1) - \text{Heaviside}(t$

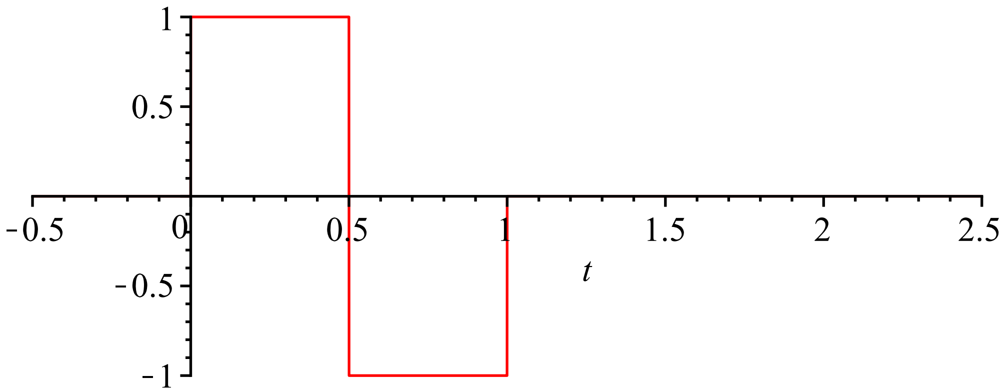
$$- 2)) \cdot \sin\left(\frac{\text{Pi}}{2} \cdot t \right) :$$

> $plot(f, t = -0.5 .. 2.5)$



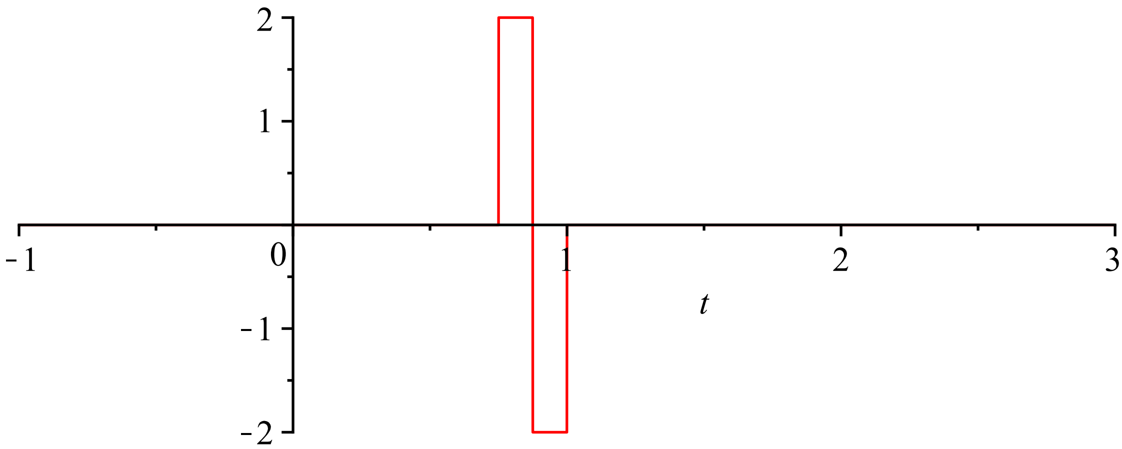
> $w := \text{Heaviside}(t) - 2 \cdot \text{Heaviside}\left(t - \frac{1}{2} \right) + \text{Heaviside}(t - 1) :$

> $plot(w, t = -0.5 .. 2.5)$



> **for** m **from** -3 **to** 1 **do**
for k **from** 0 **to** 15 **do**
$haarw[m, k] := 2^{\left(-\frac{m}{2} \right)} \cdot subs\left(t = 2^{(-m)} \cdot t - k, w \right)$
od:
od:

> $plot(haarw[-2, 3], t = -1 .. 3)$



> **for** m **from** -3 **to** 1 **do**

for k from 0 to 15 do

$$c[m,k] := evalf\left(2^{\left(-\frac{m}{2}\right)} \cdot int\left(f, t = k\cdot 2^m .. \left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot 2^m\right) - 2^{\left(-\frac{m}{2}\right)} \cdot int\left(f, t = \left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot 2^m .. (k+1)\cdot 2^m\right)\right)$$

od

od

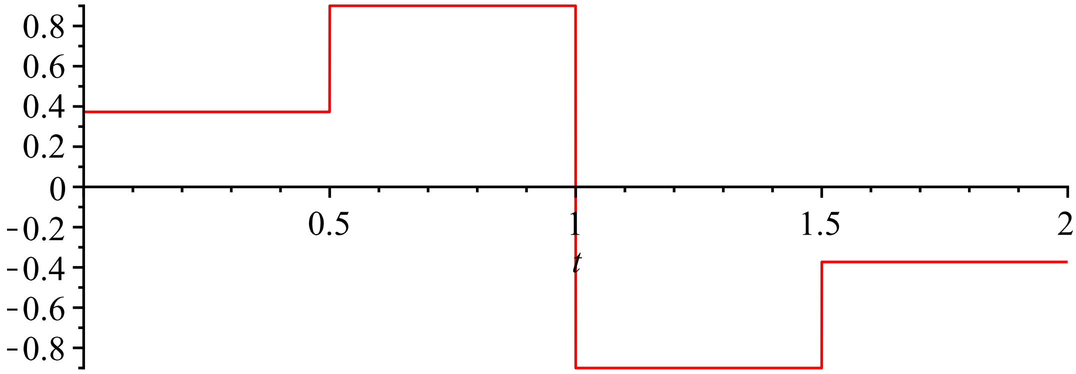
> $c[1,0]$

$$0.9003163158 \qquad (4.1)$$

> $g[1] := c[1,0]\cdot haarw[1,0]:$

> $g[0] := sum(c[0,l]\cdot haarw[0,l], l=0..1):$

> $plot(g[1]+g[0], t=0..2)$

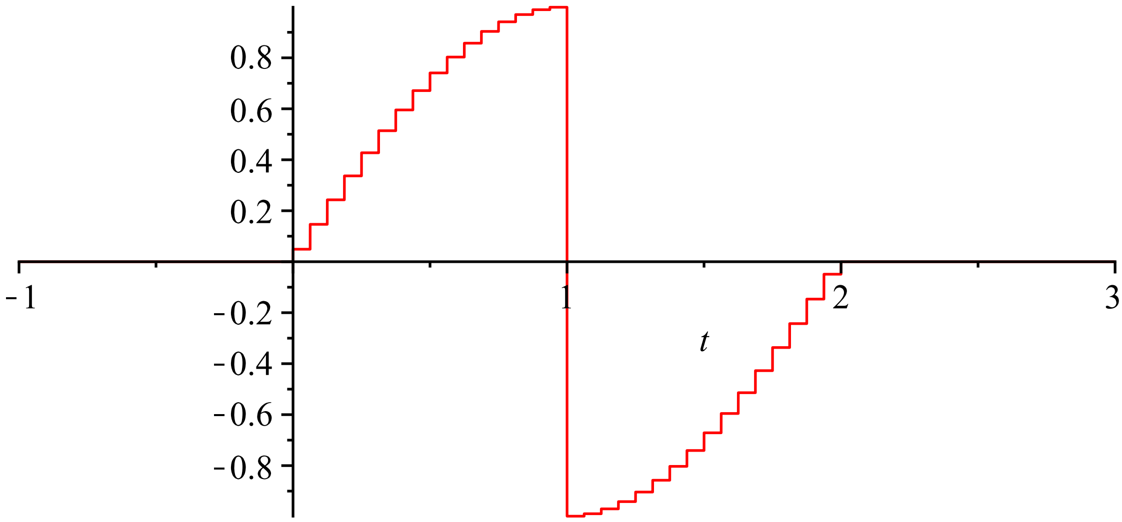


> $g[-1] := sum(c[-1,l]\cdot haarw[-1,l], l=0..3):$

> $g[-2] := sum(c[-2,l]\cdot haarw[-2,l], l=0..7):$

> $g[-3] := sum(c[-3,l]\cdot haarw[-3,l], l=0..15):$

> $plot(g[1]+g[0]+g[-1]+g[-2]+g[-3], t=-1..3, numpoints=1000)$



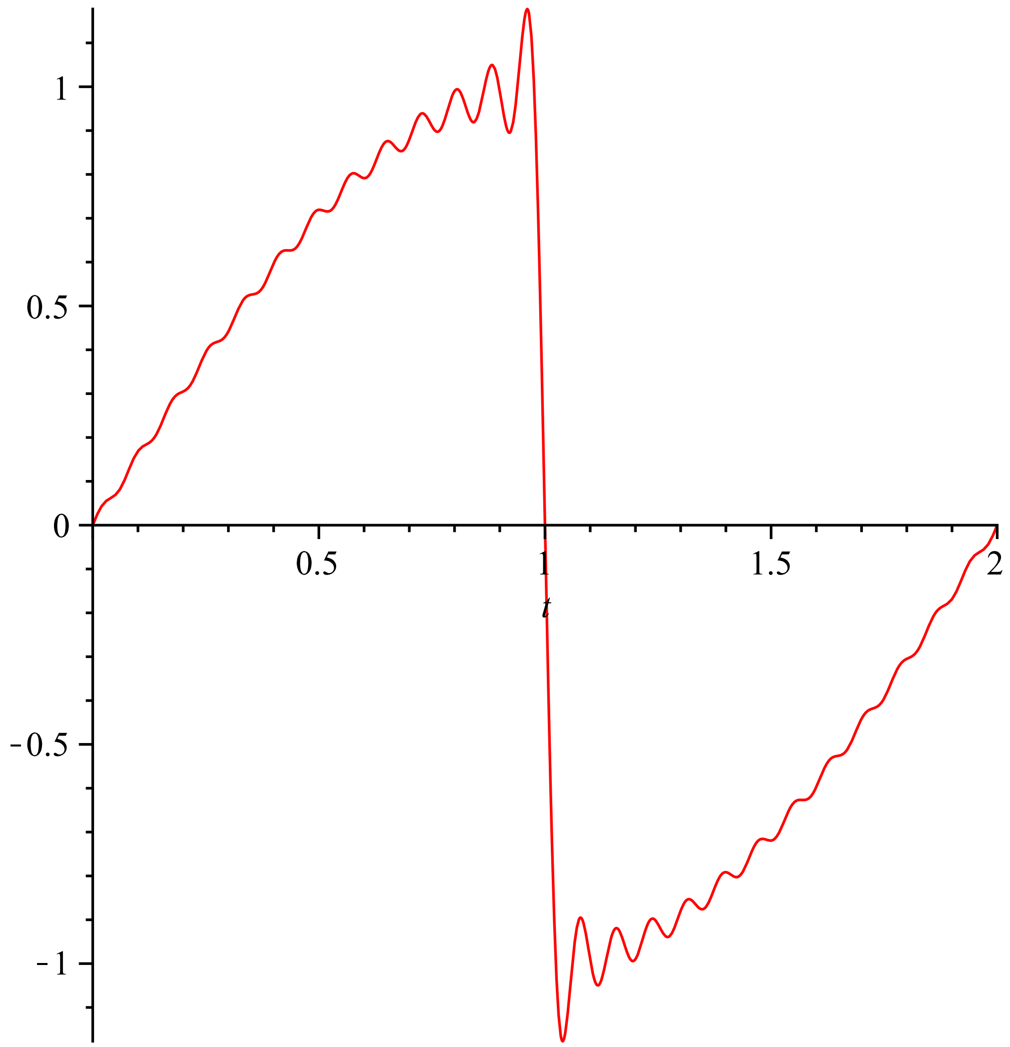
> for m from 1 to 50 do

$$b[m] := int\left(\sin\left(\frac{\mathrm{Pi}}{2}\cdot t\right)\cdot \sin\left(m\cdot\frac{\mathrm{Pi}}{2}\cdot t\right), t=0..1\right) - int\left(\sin\left(\frac{\mathrm{Pi}}{2}\cdot t\right)\cdot \sin\left(m\cdot\frac{\mathrm{Pi}}{2}\cdot t\right), t=1..2\right)$$

od:

> $h := sum\left(b[l]\cdot \sin\left(l\cdot\frac{\mathrm{Pi}}{2}\cdot t\right), l=1..50\right):$

> $plot(h, t=0..2)$


1
0.5
0
-0.5
-1
0.5
1
1.5
2
t