Solving Equations - Übungen (SS7)

Felix Rohrer

7.1 Gleichungen in einer Variablen

Quadratische Gleichungen

Lösen sie unter Berücksichtigung aller Parameterwerte nach x auf:

a)

$x^4 - 5 \cdot a^2 \cdot x^2 + 6 \cdot a^4 = 0$

> *restart*

> $gl := x^4 - 5 \cdot a^2 \cdot x^2 + 6 \cdot a^4 = 0 :$

> $solve(gl, x)$

$$\sqrt{2}\, a, -\sqrt{2}\, a, \sqrt{3}\, a, -\sqrt{3}\, a \qquad \textbf{(1.1.1)}$$

b)

$x^4 - 3 \cdot a \cdot x^2 - 4 \cdot a^2 = 0$

> *restart*

> $gl := x^4 - 3 \cdot a \cdot x^2 - 4 \cdot a^2 = 0 :$

> $solve(gl, x)$

$$\sqrt{-a}, -\sqrt{-a}, 2\sqrt{a}, -2\sqrt{a} \qquad \textbf{(1.2.1)}$$

c)

$(x + 1)^5 - (x - 1)^5 = 23032$

> *restart*

> $with(RealDomain) :$

> $gl := (x + 1)^5 - (x - 1)^5 = 23032 :$

> $expand(gl)$

$$10\, x^4 + 20\, x^2 + 2 = 23032 \qquad \textbf{(1.3.1)}$$

> $solve(gl, x)$

$$-\sqrt{47}, \sqrt{47} \qquad \textbf{(1.3.2)}$$

Hornerschema

Berechnen sie $p(x_0)$ exakt

a)

$p(x) = 4\cdot x^3 - 8\cdot x^2 - 11\cdot x + 15$ für $x_0 = 5$ und $x_0 = -4$

> *restart*

> $p := x \rightarrow 4\cdot x^3 - 8\cdot x^2 - 11\cdot x + 15 :$

> $p(5)$

$$260 \tag{2.1.1}$$

Hornerschema "überprüfen":

> $convert\left(\frac{p(x)}{(x-5)}, parfrac, x\right)$

$$4x^2 + 12x + 49 + \frac{260}{x-5} \tag{2.1.2}$$

	4	-8	-11	15
5	0	20	60	245
	4	12	49	260

> $p(4)$

$$99 \tag{2.1.3}$$

	4	-8	-11	15
4	0	16	32	84
	4	8	21	99

b)

$p(x) = -2\cdot x^6 + 13\cdot x^4 + 25\cdot x^2 - 17$ für $x_0 = 3$ und $x_0 = \sqrt{5}$

> *restart*

> $p := x \rightarrow -2\cdot x^6 + 13\cdot x^4 + 25\cdot x^2 - 17 :$

> $p(3)$

$$-197 \tag{2.2.1}$$

	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
	-2	0	13	0	25	0	-17
3	0	-6	-18	-15	-45	-60	-180
	-2	-6	-5	-15	-20	-60	-197

> $p(\mathrm{sqrt}(5))$

$$183 \tag{2.2.2}$$

	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
	-2	0	13	0	25	0	-17
2.23606798	0	-4.47213595	-10	6.70820393	15	89.4427191	200
	-2	-4.47213595	3	6.70820393	40	89.4427191	183

Auf algebraische zurückführbare Gleichungen

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen:

a)

$$\frac{15\cdot x^2-26\cdot x+8}{5\cdot x-2}+5=3\cdot x$$

> *restart*

> $gl := \frac{15\cdot x^2-26\cdot x+8}{5\cdot x-2}=(3\cdot x-5)$

$$gl := \frac{15\,x^2-26\,x+8}{5\,x-2}=3\,x-5 \quad \textbf{(3.1.1)}$$

> $solve(gl, x)$

L = { }

Keine Lösung, da {2/5} nicht erlaubt ist (divison durch 0)

b)

$$x^{-1}\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot(x-2)+\frac{1}{4}\cdot x^{-1}$$

> *restart*

> $gl := x^{-1}\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot(x-2)+\frac{1}{4}\cdot x^{-1}$

$$gl := \frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{x}=\left(1-\frac{1}{x}\right)(x-2)+\frac{1}{4\,x} \quad \textbf{(3.2.1)}$$

> $solve(gl, x)$

$$x \quad \textbf{(3.2.2)}$$

Es gibt unendlich viele Lösungen (ohne 0). L = {x | x ∈ R\0}

Lösen sie ebenso die Gleichungen (wenn möglich exakt)

c)

$$\mathrm{e}^x=1+\mathrm{e}^{-x}$$

> *restart*

> $gl := \mathrm{e}^x=1+\mathrm{e}^{-x}$:

> $solve(gl, x)$

$$\ln\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right), \ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right) \quad \textbf{(3.3.1)}$$

$$\mathbf{L}=\left\{\ln\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right), \ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)\right\}$$

d)

$(16^x - 1)^3 - 49\cdot(16^x - 1) = 0$

> *restart*

> $gl := (16^x - 1)^3 - 49\cdot(16^x - 1) = 0$

$$gl := (16^x - 1)^3 - 49\, 16^x + 49 = 0 \qquad \textbf{(3.4.1)}$$

> *with*(*RealDomain*) :

> *solve*(*gl*, *x*)

$$0, \frac{3}{4} \qquad \textbf{(3.4.2)}$$

$$\mathbf{L} = \left\{\mathbf{0}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\right\}$$

Numerisch zu lösende Gleichungen

Lösen sie folgende Gleichung, indem sie in ein Koordinatensystem zwei Kurven zeichnen, den Schnittpunkt (die Lösung) schätzen und schliesslich mit einem Programm jede Lösung auf 4 Stellen nach dem Komma berechnen:

$$2 \cdot x^2 = \frac{3 \cdot x}{2} + 1$$

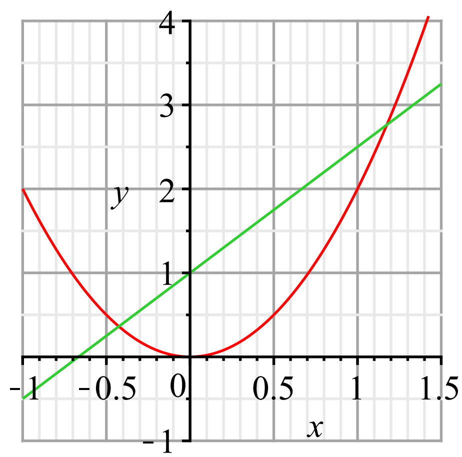
Verwenden Sie alle drei numerischen Verfahren - Fixpunktiteration, Regula Falsi und Newtonverfahren - und vergleichen Sie die Resultate.

> $restart$

> $f1 := x \rightarrow 2 \cdot x^2 :$

> $f2 := x \rightarrow \frac{3 \cdot x}{2} + 1 :$

> $plot([f1(x), f2(x)], x = -1..1.5, y = -1..4)$



Geschätze Schnittpunkte (x;y): (-0.4; 0.5) und (1.2; 2.7)

> $lsg := solve(f1(x) = f2(x)) :$

> $evalf(lsg) :$

> $x_1 = evalf(lsg[1])$

$$x_1 = 1.175390530 \quad \textbf{(4.1)}$$

> $y_1 = evalf(f1(lsg[1]))$

$$y_1 = 2.763085796 \quad \textbf{(4.2)}$$

> $x_2 = evalf(lsg[2])$

$$x_2 = -0.4253905296 \quad \textbf{(4.3)}$$

> $y_2 = evalf(f1(lsg[2]))$

$$y_2 = 0.3619142054 \quad \textbf{(4.4)}$$

Fixpoint

> *restart*

> $fixpoint := \textbf{proc}(f :: procedure, x0 :: float, n :: posint)$

```
 local k :: posint, xk :: float;
 xk := x0;
 printf("k=%4d, x_k=%17.14f, f(x_k)=%17.14f\n", 0, xk, f(xk));
 for k from 1 to n do
   xk := f(xk);
   printf("k=%4d, x_k=%17.14f, f(x_k)=%17.14f\n", k, xk, f(xk));
 od;
 end:
```

> $f := x \rightarrow \frac{\mathrm{sqrt}(3 \cdot x + 2)}{2}$

$$f := x \rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{3\,x+2} \tag{4.1.1}$$

> $fixpoint(f, 1.0, 10)$

```
k=   0, x_k= 1.00000000000000, f(x_k)= 1.11803398800000
k=   1, x_k= 1.11803398800000, f(x_k)= 1.15694662400000
k=   2, x_k= 1.15694662400000, f(x_k)= 1.16949132800000
k=   3, x_k= 1.16949132800000, f(x_k)= 1.17350692200000
k=   4, x_k= 1.17350692200000, f(x_k)= 1.17478942400000
k=   5, x_k= 1.17478942400000, f(x_k)= 1.17519873600000
k=   6, x_k= 1.17519873600000, f(x_k)= 1.17532933800000
k=   7, x_k= 1.17532933800000, f(x_k)= 1.17537100600000
k=   8, x_k= 1.17537100600000, f(x_k)= 1.17538430100000
k=   9, x_k= 1.17538430100000, f(x_k)= 1.17538854200000
k=  10, x_k= 1.17538854200000, f(x_k)= 1.17538989600000
```

RegulaFalsi

```
> restart
> RegulaFalsi :=proc(f :: procedure, a :: numeric, b :: numeric, eps :: numeric, n
      :: posint)
   local xu :: numeric, xo :: numeric, xk :: numeric, k :: integer;
   k := 0;
   xu := a;
   xo := b;
   while abs(xo-xu) > eps and k < n
   do
     k := k + 1;
     xk := xo - f(xo) * (xo-xu) / (f(xo)-f(xu));
     if evalf(f(xk) *f(xu)) < 0 then
        xo := xk;
     else
        xu := xk;
   end if;
   printf("k=%4d, xk=%17.14f, f(xk)=%17.14f\n", k, xk, f(xk));
    end do;
    end:
> f := x→2 * x^2 − 3 * x / 2 − 1
```

$$f := x \rightarrow 2\,x^2 - \frac{3}{2}\,x - 1 \qquad \textbf{(4.2.1)}$$

```
> RegulaFalsi(f, -1.0, 0.0, 0.0, 12)
k=   1, xk=-0.28571428570000, f(xk)=-0.40816326530000
k=   2, xk=-0.38596491230000, f(xk)=-0.12311480460000
k=   3, xk=-0.41478439430000, f(xk)=-0.03373122100000
k=   4, xk=-0.42257529050000, f(xk)=-0.00899731200000
k=   5, xk=-0.42464594650000, f(xk)=-0.00238272040000
k=   6, xk=-0.42519378750000, f(xk)=-0.00062980500000
k=   7, xk=-0.42533855740000, f(xk)=-0.00016638710000
k=   8, xk=-0.42537680140000, f(xk)=-0.00004395150000
k=   9, xk=-0.42538690340000, f(xk)=-0.00001160970000
k=  10, xk=-0.42538957180000, f(xk)=-0.00000306670000
k=  11, xk=-0.42539027670000, f(xk)=-0.00000081000000
k=  12, xk=-0.42539046290000, f(xk)=-0.00000021380000
> RegulaFalsi(f, 1.0, 2.0, 0.0, 12)
k=   1, xk= 1.11111111100000, f(xk)=-0.19753086400000
k=   2, xk= 1.15294117600000, f(xk)=-0.07086505400000
k=   3, xk= 1.16768665800000, f(xk)=-0.02454572500000
k=   4, xk= 1.17276294100000, f(xk)=-0.00839858000000
k=   5, xk= 1.17449620600000, f(xk)=-0.00286163300000
k=   6, xk= 1.17508635600000, f(xk)=-0.00097364600000
k=   7, xk= 1.17528710100000, f(xk)=-0.00033111200000
k=   8, xk= 1.17535536300000, f(xk)=-0.00011258600000
k=   9, xk= 1.17537857300000, f(xk)=-0.00003828000000
k=  10, xk= 1.17538646500000, f(xk)=-0.00001301400000
k=  11, xk= 1.17538914800000, f(xk)=-0.00000442400000
k=  12, xk= 1.17539006000000, f(xk)=-0.00000150400000
```

Netwon

```
> restart
> NewtonApprox := proc(f :: procedure, x0 :: numeric, eps :: numeric, n :: integer)
  local xk :: numeric, fxk :: numeric, dfxk :: numeric, dx :: numeric, k :: integer, err
        :: numeric, dxk :: numeric;
  k := 0;
  xk := x0;
  dx := 1.0 * 10^(-7);
  err := eps + 1.0;
   while err > eps and k < n
   do
    k := k + 1;
    fxk := f(xk);
    dfxk := (f(xk + dx) - fxk) / dx;
    dxk := -fxk/dfxk;
    err := abs(dxk);
    xk := xk + dxk;
    printf("k=%4d, xk=%17.14f, f(xk)=%17.14f\n", k, xk, f(xk));
  od:
  RETURN(xk);
   end:
> f := x→2 * x^2 − 3 * x / 2 − 1
```

$$f := x \to 2\,x^2 - \frac{3}{2}\,x - 1 \qquad \textbf{(4.3.1)}$$

```
> NewtonApprox(f, 1.0, 1.0 * 10^(-9), 10)
k=   1, xk= 1.20000000000000, f(xk)= 0.08000000000000
k=   2, xk= 1.17575757600000, f(xk)= 0.00117539200000
k=   3, xk= 1.17539026600000, f(xk)=-0.00000084500000
k=   4, xk= 1.17539053000000, f(xk)= 0.00000000100000
k=   5, xk= 1.17539053000000, f(xk)= 0.00000000100000
```

$$1.175390530 \qquad \textbf{(4.3.2)}$$

7.2 Ungleichungen in einer Variablen

Aufgabe

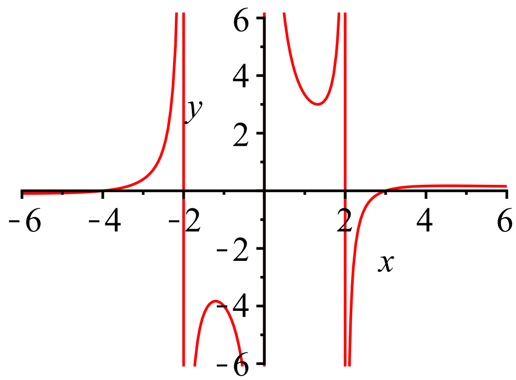
Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung (exakt: Taschenrechner nur zur Kontrolle verwenden)

$$\frac{x^2+x-12}{x^3-4\cdot x} \geq 0$$

> *restart*

> $gl := \frac{x^2+x-12}{x^3-4\cdot x}$:

> $plot(gl, x=-6..6, y=-6..6)$



> $expand(gl)$

$$\frac{x^2}{x^3-4x}+\frac{x}{x^3-4x}-\frac{12}{x^3-4x} \quad \textbf{(5.1)}$$

$$\frac{x^2+x}{x^3-4x} \geq \frac{12}{x^3-4x} \qquad \Big|\cdot x^3-4x$$

$x^2+x \geq 12$

$x^2+x-12 \geq 0$

=> Quad.Gl.

> $gl2 := x^2+x-12$:

> $solve(gl2, x)$

$$3, -4 \quad \textbf{(5.2)}$$

Pollstellen: $(x^3-4\cdot x)$

> $poll := x^3-4\cdot x$:

> $solve(poll, x)$

$$0, 2, -2 \quad \textbf{(5.3)}$$

L = {x | -4 ≤ x < -2 oder 0 < x < 2 oder x ≥ 3}

7.3 Systeme von linearen Gleichungen

Gleichungssystem mit Parameter

Für welche $k \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} k \cdot x + y \quad &= 1 \\ x + k \cdot y \quad &= 1 \\ k \cdot z &= 1 \end{aligned}$$

keine, genau eine, oder unendlich viele Lösungen?
Tipp: Gleichungssystem durch zulässige Umformungen auf Dreiecks- bzw. Stufenform bringen.

[Koeefizienten Matrix + RHS]

$$> \begin{bmatrix} k & 1 & 0 & 1 \\ 1 & k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k & 1 \end{bmatrix} :$$

Siehe Blatt 5...
k = 0 oder k = -1 => keine Lösung
k = R\{-1, 0, 1} => genau eine Lösung
k = 1 => unendlich viele Lösungen (da z = 1 => $t \cdot y = 0$)

Matrizengleichung

Lösen Sie die folgende Matrizengleichung nach X auf und vereinfachen Sie das Resultat so weit als möglich:

$$\left(\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}\right)^2 \cdot X^T \cdot \left[\left(\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}\right)^2\right]^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$A^2 \cdot X^T \cdot (A^2)^{-1} = B$ | *beide Seiten* $: \cdot (A^2)^{-1}$

$E \cdot X^T \cdot (A^2)^{-1} = (A^2)^{-1} \cdot B$ | *beide Seiten* $: \cdot (A^2)$

$E \cdot X^T \cdot E = (A^2)^{-1} \cdot B \cdot (A^2)$ | *Vereinfachen*

$X^T = (A^2)^{-1} \cdot B \cdot (A^2)$ | X^T *aufheben* $\Rightarrow$ *Reihenfolge ändert!*

$\boldsymbol{X = (A^2)^T \cdot B^T \cdot \left((A^2)^T\right)^{-1}}$

> *restart*

> *with(LinearAlgebra) :*

$$> A := \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} :$$

> $B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}:$

> $X := Transpose(A.A).Transpose(B).MatrixInverse(Transpose(A.A))$

$$X := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{a^2}{c^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{c^2}{b^2} & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(7.1)}$$

Textaufgaben und Gleichungssysteme

Eine dreistellige Zahl hat die Quersumme 18. Vertauscht man die erste Ziffer (von links) mit der zweiten, so wächst die Zahl um 180; vertauscht man statt dessen die zweite Ziffer mit der dritten, so wächst die Zahl um 18. Wie heisst die Zahl?

> $restart$

> $gl1 := x + y + z = 18:$

> $gl2 := 100 \cdot x + 10 \cdot y + z = 100 \cdot y + 10 \cdot x + z - 180:$

> $gl3 := 100 \cdot x + 10 \cdot y + z = 100 \cdot x + 10 \cdot z + y - 18:$

> $solve([gl1, gl2, gl3], [x, y, z])$

$$[[x = 4, y = 6, z = 8]] \qquad \textbf{(8.1)}$$

Die gesuchte Zahl lautet 468.

Gleichungssystem und Gauss-Algorithmus

Lösen sie folgendes Gleichungssystem mit dem Gauss-Algorithmus:

$x + a \cdot y + a^2 \cdot z = 0$

$x + 2 \cdot a \cdot y + 2 \cdot a^2 \cdot z = 0$

$x + b \cdot y + a \cdot b \cdot z = 0$

Falls die Lösung von den Parametern a oder/und b abhängt, geben sie dies im Resultat an. Schreiben Sie die Lösung in Form einer Menge auf.

Siehe Blatt 6