Advanced Counting - Übungen (SS6)

Felix Rohrer

Rekursionen

1. KR, Abschnitt 7.1, Aufgabe 1a+d:

Bestimmen Sie jeweils die ersten fünf Glieder der folgenden rekursiven Zahlenfolgen:

a)

$a_n = 6\, a_{n-1}$

$a_0 = 2$

```
> restart
> aufg1 := proc(a)
   if a = 0 then return 2
   else return 6 · aufg1(a − 1)
   fi
   end proc :
> for n from 0 to 4 do aufg1(n) od
```

$$2$$
$$12$$
$$72$$
$$432$$
$$2592 \tag{1.1.1}$$

Die Folge lautet: 2, 12, 72, 432, 2592

b)

$a_n = n \cdot a_{n-1} + n^2 \cdot a_{n-2}$

$a_0 = 1$

$a_1 = 1$

```
> restart
> aufg1b := proc(a)
   if a = 0 then return 1
   elif a = 1 then return 1
   else return a·aufg1b(a − 1) + a^2·aufg1b(a − 2)
   fi
   end proc :
> for n from 0 to 4 do aufg1b(n) od
```

$$1$$
$$1$$
$$6$$
$$27$$

(1.2.1)

$$204 \tag{1.2.1}$$

Die Folge lautet: 1, 1, 6, 27, 204

I. KR, Abschnitt 7.1, Aufgabe 3c:

Sei $a_n = 2^n + 5 \cdot 3^n$ für $n = 0, 1, 2, 3, ...$
Zeigen Sie, dass diese Folge die Rekursionbeziehung $a_n = 5 \cdot a_{n-1} - 6 \cdot a_{n-2}$ für alle $n \geq 2$ erfüllt.

Induktionsbeweis:

$a_n = 2^n + 5 \cdot 3^n$

$a_{n-1} = 2^{n-1} + 5 \cdot 3^{n-1}$

$a_{n-2} = 2^{n-2} + 5 \cdot 3^{n-2}$

$a_n = 5 \cdot a_{n-1} - 6 \cdot a_{n-2}$

$2^n + 5 \cdot 3^n = 5 \cdot (2^{n-1} + 5 \cdot 3^{n-1}) - 6 \cdot (2^{n-2} + 5 \cdot 3^{n-2})$

> *restart*

> $simplify(2^n + 5 \cdot 3^n)$

$$2^n + 5\, 3^n \tag{2.1}$$

> $simplify(5 \cdot (2^{n-1} + 5 \cdot 3^{n-1}) - 6 \cdot (2^{n-2} + 5 \cdot 3^{n-2}))$

$$2^n + 5\, 3^n \tag{2.2}$$

Links und rechts vom Gleich steht der gleiche Therm => wahr.

2. KR, Abschnitt 7.1, Aufgabe 5a-f:

Wir betrachten die rekursive Relation $a_n = 8 \cdot a_{n-1} - 16 \cdot a_{n-2}$. Welche der folgenden Zahlenfolgen sind Lösungen dieser Relation? Begründen Sie Ihre Aussage.

a)

$a_n = 0$

$0 = 8 \cdot 0 - 16 \cdot 0$

wahr

b)

$a_n = 1$

$1 \neq 8 \cdot 1 - 16 \cdot 1$

falsch

c)

$a_n = 2^n$

$2^n \;=?=\; 8 \cdot 2^{n-1} - 16 \cdot 2^{n-2}$

2^n =?= $8 \cdot 2^{n-1} - 16 \cdot 2^{n-2}$
2^n =?= $2^{n-2}(8 \cdot 2 - 16)$
2^n =?= $2^{n-2}(0)$
$2^n \neq 0$

falsch

> *restart*

> $gl1 := 2^n :;$
> $gl2 := 8 \cdot 2^{n-1} - 16 \cdot 2^{n-2} :$

> *simplify*$(gl1 = gl2)$

$$2^n = 0 \tag{3.3.1}$$

d)

$a_n = 4^n$

4^n =?= $8 \cdot 4^{n-1} - 16 \cdot 4^{n-2}$
4^n =?= $4^{n-2} \cdot (8 \cdot 4 - 16)$
4^n =?= $4^{n-2} \cdot (32 - 16)$
4^n =?= $4^{n-2} \cdot (16)$
4^n =?= $4^{n-2} \cdot (4^2)$
$4^n = 4^n$

wahr

> *restart*

> $gl1 := 4^n ::$
> $gl2 := 8 \cdot 4^{n-1} - 16 \cdot 4^{n-2} :$

> *simplify*$(gl1 = gl2)$

$$4^n = 4^n \tag{3.4.1}$$

e)

$a_n = n \cdot 4^n$

$n \cdot 4^n$ =?= $8 \cdot ((n-1) \cdot 4^{n-1}) - 16 \cdot ((n-2) \cdot 4^{n-2})$
$n \cdot 4^n$ =?= $4^{n-2} \cdot (8 \cdot (n-1) \cdot 4 - 16 \cdot (n-2))$
$n \cdot 4^n$ =?= $4^{n-2} \cdot (32 \cdot (n-1) - 16 \cdot (n-2))$
$n \cdot 4^n$ =?= $4^{n-2} \cdot (32\, n - 32 - 16\, n + 32)$
$n \cdot 4^n$ =?= $4^{n-2} \cdot (16\, n)$
$n \cdot 4^n$ =?= $4^{n-2} \cdot (4^2 \cdot n)$
$n \cdot 4^n = 4^n \cdot n$

wahr

> *restart*

> $gl1 := n \cdot 4^n ::$
> $gl2 := 8 \cdot ((n-1) \cdot 4^{n-1}) - 16 \cdot ((n-2) \cdot 4^{n-2}) :$

> *simplify*$(gl1 = gl2)$

(3.5.1)

$$n\,4^n = n\,4^n \qquad \textbf{(3.5.1)}$$

f)

$a_n = 2\cdot 4^n + 3\cdot n\cdot 4^n$

> restart

> $gl1 := 2\cdot 4^n + 3\cdot n\cdot 4^n$:;
$gl2 := 8\cdot\left(2\cdot 4^{n-1} + 3\cdot(n-1)\cdot 4^{n-1}\right) - 16\cdot\left(2\cdot 4^{n-2} + 3\cdot(n-2)\cdot 4^{n-2}\right)$:

> $simplify(gl1 = gl2)$

$$4^n\,(2+3\,n) = 4^n\,(2+3\,n) \qquad \textbf{(3.6.1)}$$

wahr

3. KR, Abschnitt 7.1, Aufgabe 11b:

Nehmen wir an, dass sich die Bakterienanzahl in einer Kolonie jede Stunde verdreifacht. Wieviele Bakterien leben nach zehn Stunden in der Kolonie, wenn es am Anfang genau 100 Bakterien gab?

$t_0 = 100$

$t_1 = 3\cdot t_0$

$t_2 = 3\cdot t_1$

usw...

$t_n = 3\cdot t_{n-1}$

$t_n = 3^n\cdot t_0$

> $3^{10}\cdot 100$

$$5904900 \qquad \textbf{(4.1)}$$

Nach 10 Stunden sind es 5'904'900 Bakterien.

4. KR, Abschnitt 7.1, Aufgabe 23:

Bestimmen Sie die Rekursionsbeziehung für die Anzahl Bitstrings der Länge n, die (mindestens) ein Paar benachbarter Nullen enthalten.
Was ist die Anfangsbedingung? Wieviele solcher Bitstrings der Länge 7 gibt es?

Bitstrings => Anz. mit mindestens ein Paar benachbarter Nullen:

$a_0 = \{\}$ => 0

$a_1 = 0, 1$ => 0

$a_2 = 00, 01, 10, 11$ => 1

$a_3 = 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 110$ => 3

$a_4 = 0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111$ => 8

usw...

a_0 : [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] => 2^n Möglichkeiten, Länge: a_n

a_1 : Fall xxx0: [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [0] ==> kein "00" String => aber bei a_{n-1} möglich...

a_1 : Fall xxx1: [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [1] ==> kein "00" String

a_2 : Fall xx00: [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [0] [0] ==> "00" String ! => "freie Stellen": 2^{n-2} Möglichkeiten, Länge a_{n-2} ==> 2^{n-2} Möglickeiten inkl. "00" im Bitstring $+ a_{n-2} + a_{n-1}$
a_2 : Fall xx10: [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [1] [0] ==> kein "00" String

$\boldsymbol{a_0 = 0}$
$\boldsymbol{a_1 = 0}$
$\boldsymbol{a_n = 2^{n-2} + a_{n-2} + a_{n-1}}$

```
> restart
> aufg4 :=proc(a)
    if a = 0 then return 0
    elif a = 1 then return 0
    else return 2^(a-2) + aufg4(a - 2) + aufg4(a - 1)
    fi
    end proc :
> aufg4(7)
```

94 **(5.1)**

Es gibt 94 Bitstrings mit "00" bei eine Länge von 7 Bits.

5. KR, Abschnitt 7.1, Aufgabe 25:

Bestimmen Sie die Rekursionsbeziehung für die Anzahl Bitstrings der Länge n, die kein Tripel benachbarter Nullen enthalten.
Was ist die Anfangsbedingung? Wieviele solcher Bitstrings der Länge 7 gibt es?

kein Tripel benachbarter Nullen => es darf kein "000" vorkommen => alle minus die "000"er BitStrings

$a_0 = \{\}$ => 1
$a_1 = 0, 1$ => 2
$a_2 = 00, 01, 10, 11$ => 4
$a_3 = 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 110$ => 7
$a_4 = 0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111$ => 12
usw...

a_0 Möglichkeiten (leer ist auch gültig)
a_1: Fall 0: [0] => kein "000"
a_1: Fall 1: [1] => kein "000"
=> alle OK $a_1 = 2$

a_2: Fall 00: [0] [0] => kein "000"
a_2: Fall 01: [0] [1] => kein "000"
a_2: Fall 10: [1] [0] => kein "000"
a_2: Fall 11: [1] [1] => kein "000"
=> alle OK $a_2 = 4$

a_3: Fall 000: [0] [0] [0] => "000" gefunden => darf nicht gezählt werden!
a_3: Fall 001: [0] [0] [1] => kein "000"

a_3: Fall 010: [0] [1] [0] => kein "000"
a_3: Fall 011: [0] [1] [1] => kein "000"
a_3: Fall 100: [1] [0] [0] => kein "000"
a_3: Fall 101: [1] [0] [1] => kein "000"
a_3: Fall 110: [1] [1] [0] => kein "000"
a_3: Fall 111: [1] [1] [1] => kein "000"
=> 7 von 8 OK, resp. alle "davor" sind gültig
$a_3 = a_2 + a_1$
$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$

$\boldsymbol{a_0 = 1}$
$\boldsymbol{a_1 = 2}$
$\boldsymbol{a_2 = 4}$
$\boldsymbol{a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}}$

```
> aufg5 := proc(a)
    if a = 0 then return 1
    elif a = 1 then return 2
    elif a = 2 then return 4
    else return aufg5(a − 1) + aufg5(a − 2) + aufg5(a − 3)
    fi
    end proc :
> aufg5(7)
```

$$81 \tag{6.1}$$

Es gibt 81 Möglichkeiten bei einem 7-Bitstring ohne das "000" enthalten ist.

II. KR, Abschnitt 7.1, Aufgabe 40:

Bestimmen Sie die Rekursionsbeziehung für die Anzahl Bitstrings der Länge n, die eine gerade Anzahl Nullen enthalten.
Wie müssen die Anfangsbedingungen gewählt werden? Überprüfen Sie die gefundenen Formel für n = 0, 1, 2, 3 und 4 indem Sie alle Bitstrings dieser Länge (die die obige Eigenschaft erfüllen) auflisten und abzählen.

a_0: {} (ohne Null => gültig)

a_1: Fall xxx0: [ ] ... [ ] [ ] [0] => Rest: Länge: n-1 und ungerade Anzahl Null => Anzahl: Alle - "ungerade Anz. Null" $= 2^{n-1} - a^{n-1}$
a_1: Fall xxx1: [ ] ... [ ] [ ] [1] => Rest: Länge: n-1 und gerade Anzahl Null => Anzahl: a^{n-1}

Beide Fälle zusammen:
$a_n = 2^{n-1} - a^{n-1} + a^{n-1}$

$\boldsymbol{a_0 = 1}$
$\boldsymbol{a_n = 2^{n-1}}$

```
> restart
```

```
> aufgII := proc(n)
      if n = 0 then return 1  else return 2^(n - 1)  fi
   end proc:
> for n from 0 to 4 do aufgII(n)  od
```

$$1$$
$$1$$
$$2$$
$$4$$
$$8 \tag{7.1}$$

n=0: {}
=> a_0 = 1
n=1: 0, 1
=> a_1 = 1
n=2: 00, 01, 10, 11
=> a_2 = 2
n=3: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111
=> a_3 = 4
n=4: 0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111 => a_4 = 8

Lösen von linearen Rekursionsbeziehungen

6. KR, Abschnitt 7.2, Aufgabe 3a,c,d:

Lösen Sie die folgenden Rekursionsbeziehungen mit den gegebenen Anfangsbedingungen.

> *restart*

a)

$a_n = 2 \cdot a_{n-1}$ *für* $n \geq 1$ *und* $a_0 = 3$

Ansatz: $a_n = r^n$

r bestimmen:

$r^n = 2 \cdot r^{n-1} \quad | : r^{n-1}$

$r^1 = 2$

$r = 2$

r und a_0 einsetzen:

$a_n = a_0 \cdot r^n$

$\boldsymbol{a_n = 3 \cdot 2^n}$

b)

$a_n = 5 \cdot a_{n-1} - 6 \cdot a_{n-2}$ *für* $n \geq 2$ *und* $a_0 = 1,\ a_1 = 0$

Ansatz: $a_n = r^n$

$0 = r^n - 5 \cdot r^{n-1} + 6 \cdot r^{n-2} \quad | : r^{n-2}$

$0 = r^2 - 5 \cdot r + 6$

> $gl := r^2 - 5 \cdot r + 6$

$$gl := r^2 - 5\,r + 6 \tag{8.2.1}$$

> $solve(gl, r)$

$$3, 2 \tag{8.2.2}$$

Allgemeine Lösung: $a_n = c_1 \cdot r_1^n + c_2 \cdot r_2^n$

$a_n = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot 2^n$

$Aufgabenstellung : a_0 = 1 \Rightarrow gl0$

$Aufgabenstellung : a_1 = 0 \Rightarrow gl1$

> $gl0 := 1 = x \cdot 3^0 + y \cdot 2^0$

$$gl0 := 1 = x + y \tag{8.2.3}$$

> $gl1 := 0 = x \cdot 3^1 + y \cdot 2^1$

$$gl1 := 0 = 3\,x + 2\,y \tag{8.2.4}$$

> $solve([gl0, gl1], [x, y])$

$$[[x = -2, y = 3]] \tag{8.2.5}$$

$\boldsymbol{a_n = (-2) \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n}$

c)

$a_n = 4 \cdot a_{n-1} - 4 \cdot a_{n-2}$ *für* $n \geq 2$ *und* $a_0 = 6,\ a_1 = 8$

Ansatz: $a_n = r^n$

$0 = a_n - 4 \cdot a_{n-1} + 4 \cdot a_{n-2}$

$0 = r^n - 4 \cdot r^{n-1} + 4 \cdot r^{n-2} \quad | : r^{n-2}$

$0 = r^2 - 4 \cdot r^1 + 4$

> $gl := r^2 - 4 \cdot r + 4$

$$gl := r^2 - 4\,r + 4 \tag{8.3.1}$$

> $solve(gl, r)$

$$2, 2 \tag{8.3.2}$$

Allgemeine Lösung: $a_n = (x + y \cdot n) \cdot r^n$

> $gl0 := 6 = (x + y \cdot 0) \cdot 2^0$

$$gl0 := 6 = x \tag{8.3.3}$$

> $gl1 := 8 = (x + y \cdot 1) \cdot 2^1$

$$gl1 := 8 = 2\,x + 2\,y \tag{8.3.4}$$

> $solve([gl0, gl1], [x, y])$

$$[[x = 6, y = -2]] \tag{8.3.5}$$

$\boldsymbol{a_n = 6 \cdot 2^n - 2 \cdot n \cdot 2^n}$

7. KR, Abschnitt 7.2, Aufgaben 15 und 19:

Finden Sie die Lösungen für

> *restart*

a)

$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 5 \cdot a_{n-2} - 6 \cdot a_{n-3}$ *mit* $a_0 = 7,\ a_1 = -4$ *und* $a_2 = 8$

$0 = a_n - 2 \cdot a_{n-1} - 5 \cdot a_{n-2} + 6 \cdot a_{n-3}$

$a_n = r^n$

$0 = r^n - 2 \cdot r^{n-1} - 5 \cdot r^{n-2} + 6 \cdot r^{n-3} \quad | : r^{n-3}$

$0 = r^3 - 2 \cdot r^2 - 5 \cdot r^1 + 6$

> $gl := r^3 - 2 \cdot r^2 - 5 \cdot r + 6$

$$gl := r^3 - 2\,r^2 - 5\,r + 6 \tag{9.1.1}$$

> $solve(gl, r)$

$$1, 3, -2 \tag{9.1.2}$$

Allgemeine Lösung: $a_n = c_1 \cdot r_1^n + c_2 \cdot r_2^n + c_3 \cdot r_3^n$

$a_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot 3^n + c_3 \cdot (-2)^n$

> $gl0 := 7 = c_1 \cdot 1^0 + c_2 \cdot 3^0 + c_3 \cdot (-2)^0$

$$\tag{9.1.3}$$

$$gl0 := 7 = c_1 + c_2 + c_3 \tag{9.1.3}$$

> $gl1 := -4 = c_1 \cdot 1^1 + c_2 \cdot 3^1 + c_3 \cdot (-2)^1$

$$gl1 := -4 = c_1 + 3\,c_2 - 2\,c_3 \tag{9.1.4}$$

> $gl2 := 8 = c_1 \cdot 1^2 + c_2 \cdot 3^2 + c_3 \cdot (-2)^2$

$$gl2 := 8 = c_1 + 9\,c_2 + 4\,c_3 \tag{9.1.5}$$

> $solve([gl0, gl1, gl2], [c_1, c_2, c_3])$

$$[[c_1 = 5, c_2 = -1, c_3 = 3]] \tag{9.1.6}$$

$\boldsymbol{a_n = 5 \cdot 1^n + (-1) \cdot 3^n + 3 \cdot (-2)^n \quad = \quad 5 - 3^n + 3 \cdot (-2)^n}$

b)

$a_n = -3 \cdot a_{n-1} - 3 \cdot a_{n-2} - a_{n-3}$ *mit* $a_0 = 5,\ a_1 = -9$ *und* $a_2 = 15$

$0 = r^n + 3 \cdot r^{n-1} + 3 \cdot r^{n-2} + r^{n-3} \quad | : r^{n-3}$

$0 = r^3 + 3 \cdot r^2 + 3 \cdot r + 1$

> $gl := r^3 + 3 \cdot r^2 + 3 \cdot r + 1$

$$gl := r^3 + 3\,r^2 + 3\,r + 1 \tag{9.2.1}$$

> $solve(gl, r)$

$$-1,\ -1,\ -1 \tag{9.2.2}$$

Allgemeine Lösung: $a_n = c_1 \cdot r_1^n + c_2 \cdot r_2^n + c_3 \cdot r_3^n$

$a_n = c_1 \cdot (-1)^n + c_2 \cdot (-1)^n + c_3 \cdot (-1)^n$

??????????????????

>

>

>

Erzeugende Funktionen

8. KR, Abschnitt 7.4, Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die erzeugende Funktion der endlichen Folge 2, 2, 2, 2, 2, 2.

Geometrische Folge: $\sum_{k=0}^{5} x^k = \frac{x^6 - 1}{x - 1}$

$$\boldsymbol{f(x) = 2 \cdot \left(\frac{x^6 - 1}{x - 1} \right)}$$

9. KR, Abschnitt 7.4, Aufgaben 3d+f und 5f:

Bestimmen Sie für die gegebenen Zahlenfolgen jeweils eine erzeugende Funktion in geschlossener Form (im Allgemeinen eine rationale Funktion, in der Darstellung darf keine (unendliche) Summation vorkommen).

a)

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, . . .

$2 \cdot (1 + (2x) + (2x)^2 + (2x)^3 + (2x)^4 + \ldots)$

$$\boldsymbol{\frac{2}{1 - 2 \cdot x}}$$

b)

2,-2, 2,-2, 2,-2, 2,-2, . . .

Summe.: $\sum_{k=0}^{\infty} 2 \cdot x^k \cdot (-1)^k \quad = \quad 2 + (-2)x + 2x^2 + (-2)x^3 + 2x^4 + \ldots$

Allg.: $\sum_{k=0}^{\infty} a^k \cdot z^k \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1 - a \cdot z} \quad \Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{1 - x \cdot (-1)} \right) = \frac{2}{x - 1}$

$$\boldsymbol{\frac{2}{x - 1}}$$

c)

$a_n = \binom{n+4}{n}$ *für alle* $n = 0, 1, 2, \ldots$

$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+4}{n} \cdot x^n$

$$\boldsymbol{\frac{1}{(1 - x)^5}}$$

10. KR, Abschnitt 7.4, Aufgaben 9d und 11b:

Bestimmen Sie den Koeffizienten von x^{10} in der Potenzreihendarstellung der folgenden Funktionen.

a)

$(x^2 + x^4 + x^6 + \ldots) \cdot (x^3 + x^6 + x^9 + \ldots) \cdot (x^4 + x^8 + x^{12} + \ldots)$

> *restart*

> $gl := (x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10}) \cdot (x^3 + x^6 + x^9) \cdot (x^4 + x^8 + x^{12})$

$$gl := (x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10})\ (x^3 + x^6 + x^9)\ (x^4 + x^8 + x^{12}) \qquad \textbf{(12.1.1)}$$

> $sort(expand(gl))$

$$x^{31} + x^{29} + x^{28} + 2\,x^{27} + x^{26} + 3\,x^{25} + 2\,x^{24} + 4\,x^{23} + 2\,x^{22} + 4\,x^{21} + 3\,x^{20} + 4\,x^{19} + 2\,x^{18} + 4\,x^{17} + 2\,x^{16} + 3\,x^{15} + x^{14} + 2\,x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^9 \qquad \textbf{(12.1.2)}$$

Es gibt keinen Term x^{10} => **Lösung: 0**

b)

$$\frac{1}{(1+x)^2}$$

?????????????????

>

>

>

11. KR, Abschnitt 7.4, Aufgabe 21:

Überlegen Sie sich eine kombinatorische Interpretation für den Koeffizienten von x^4 in der Reihendarstellung von $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)^3$.
Nutzen Sie diese Interpretation um diesen Koeffizienten zu bestimmen.

> *restart*

> $gl := (x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^3 :$

> $sort(expand(gl))$

$$x^{15} + 3\,x^{14} + 6\,x^{13} + 10\,x^{12} + 15\,x^{11} + 21\,x^{10} + 25\,x^9 + 27\,x^8 + 27\,x^7 + 25\,x^6 + 21\,x^5 + 15\,x^4 + 10\,x^3 + 6\,x^2 + 3\,x + 1 \qquad \textbf{(13.1)}$$

$15 \cdot x^4 \Rightarrow$ **15**

Erweitertes Ein- und Ausschlussprinzip

12. KR, Abschnitt 7.5, Aufgabe 5:

Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente in der Vereinigungsmenge A1 ∪ A2 ∪ A3, falls jede der drei Mengen genau 100 Elemente enthält und

a)

die Mengen paarweise disjunkt sind.

Paarweise disjunkt: jedes Element unterscheidet sich vom Anderen.

M = |A1 ∪ A2 ∪ A3| = |100+100+100| = **300**

b)

jedes Paar von Mengen genau 50 gemeinsame Elemente enthält und es kein Element gibt, das in allen drei Mengen enthalten ist.

jeweils 50 "überschneidungen" und 0 "dreifache"
M = |A1 ∪ A2 ∪ A3| = |A1| + |A2| + |A3| - |A1 ∩ A2| - |A1 ∩ A3| - |A2 ∩ A3| + |A1 ∩A2 ∩ A3|

100 + 100 + 100 - 50 - 50 - 50 + 0 = **150**

c)

jedes Paar von Mengen genau 50 gemeinsame Elemente enthält und 25 Elemente in allen drei Mengen liegen.

100 + 100 + 100 - 50 - 50 - 50 + 25 = **175**

13. KR, Abschnitt 7.5, Aufgabe 11:

Bestimmen Sie die Anzahl aller natürlichen Zahlen $\leq$ 100 die ungerade oder das Quadrat einer ganzen Zahl sind.

A = Ungerade natürliche Zahlen $\leq$ 100: {1,3,5,7,...99}
|A| = 100/2 = 50

B = Quadrat einer ganzer Zahl und $\leq$ 100 = $\sqrt{1}$ .. $\sqrt{100}$ = {1,2,3...10}
|B| = 10

U = A ∪ B
|U| = 50 + 10 - 5 = **55**

III. KR, Abschnitt 7.6, Aufgabe 3:

Wieviele Lösungen hat die Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 = 13$, falls x_1, x_2 und x_3 nicht-negative ganze Zahlen kleiner als 6 sein dürfen?

=> Die Zahl x darf nicht negativ sein und muss kleiner als 6 sein => $0 \leq x < 6$ = {0,1,2,3,4,5}

```
> restart
```

$$> gl := (x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^3 :$$

> $sort(expand(gl))$

$$x^{15}+3x^{14}+6x^{13}+10x^{12}+15x^{11}+21x^{10}+25x^{9}+27x^{8}+27x^{7}+25x^{6}+21x^{5}+15x^{4}+10x^{3}+6x^{2}+3x+1 \quad \textbf{(16.1)}$$

Vorfaktor bei x^{13} => 6

Es gibt 6 Lösungen.

14. KR, Abschnitt 7.6, Aufgabe 7:

Wieviele nicht-negative ganze Zahlen kleiner als 10′000 sind nicht die Potenz (mindestens die 2.) einer ganzen Zahl?

nicht mindestens die 2. Potenz => d.h. Zahlen der Wurzeln von 1 bis 9'999 (minus 1)

> $hoch2 := \text{floor}(evalf(\sqrt{9999}))-1$

$$hoch2 := 98 \quad \textbf{(17.1)}$$

> $hoch3 := \text{floor}(evalf(\sqrt[3]{9999}))-1$

$$hoch3 := 20 \quad \textbf{(17.2)}$$

> $hoch5 := \text{floor}(evalf(\sqrt[5]{9999}))-1$

$$hoch5 := 5 \quad \textbf{(17.3)}$$

> $hoch7 := \text{floor}(evalf(\sqrt[7]{9999}))-1$

$$hoch7 := 2 \quad \textbf{(17.4)}$$

> $hoch11 := \text{floor}(evalf(\sqrt[11]{9999}))-1$

$$hoch11 := 1 \quad \textbf{(17.5)}$$

> $hoch13 := \text{floor}(evalf(\sqrt[13]{9999}))-1$

$$hoch13 := 1 \quad \textbf{(17.6)}$$

> $hoch17 := \text{floor}(evalf(\sqrt[17]{9999}))-1$

$$hoch17 := 0 \quad \textbf{(17.7)}$$

Double Counting: hoch 6 (2 und 3) und hoch 10 (2 und 5)

> $hoch6 := \text{floor}(evalf(\sqrt[6]{9999}))-1$

$$hoch6 := 3 \quad \textbf{(17.8)}$$

> $hoch10 := \text{floor}(evalf(\sqrt[10]{9999}))-1$

$$hoch10 := 1 \quad \textbf{(17.9)}$$

> $quad := hoch2+hoch3+hoch5+hoch7+hoch11+hoch13-hoch6-hoch10$

$$quad := 123 \quad \textbf{(17.10)}$$

> $9998-quad$

$$9875 \quad \textbf{(17.11)}$$

Es gibt 9875 Zahlen.

15. KR, Abschnitt 7.6, Aufgabe 21:

Für welche positive ganzen Zahlen n ist D_n, die Anzahl von Derangements von n Objekten, eine gerade Zahl?

??????????????????

>

>

>