Discrete Probability - Übungen (SS5)

Felix Rohrer

Wahrscheinlichkeitstheorie

1. KR, Abschnitt 6.1, Aufgabe 5:

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augensumme von zwei geworfenen Würfeln gerade ist.

2 Würfel: $6 \cdot 6$ Möglichkeiten => 36 Möglichkeiten
Augensumme gerade: (1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4), (4,6), (5,1), (5,3), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6) => 18 Möglichkeiten
Augensumme gerade: jede zweite Kombination

$$p\left(\frac{18}{36}\right) = 0.5$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 0.5 (50%).

2. KR, Abschnitt 6.1, Aufgabe 7:

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Münze bei 6 Würfen auch sechsmal „Kopf" zeigt?

Pro Münze gibt es 2 mögliche Zustände (Kopf, Zahl) => p("Kopf") = 0.5
Bei 6 Würfe gibt es 2^6 (64) mögliche Zustände
6 Würfe sechsmal Kopf => genau eine mögliche Version => 1

$$p\left(\frac{1}{64}\right) = \frac{1}{64}$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt $\frac{1}{64}$ (1,5625%).

3. KR, Abschnitt 6.1, Aufgabe 21:

Ein Würfel wird sechsmal geworfen. Wie gross ist die Warscheinlichkeit, dass dabei nie eine gerade Zahl erscheint?

Nur ein Würfel: Wahrscheinlichkeit für eine ungerade Zahl $p\left(\frac{3}{6}\right) = \frac{1}{2}$

Bei 6 Würfel: $\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1^6}{2^6} = \frac{1}{64}$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt $\frac{1}{64}$ (1.5625%).

4. KR, Abschnitt 6.1, Aufgabe 23:

Aus den ersten 100 natürlichen Zahlen (inklusive 100) wird zufällig eine Zahl ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Zahl durch 5 oder 7 teilbar?

A1 = {durch 5 teilbar} = {5, 10, 15, ...}

$> p_{A1} := \frac{\text{floor}\left(\frac{100}{5}\right)}{100}$

$$p_{A1} := \frac{1}{5} \quad \textbf{(4.1)}$$

A2 = {durch 7 teilbar} = {7, 14, 21, ...}

$> p_{A2} := \frac{\text{floor}\left(\frac{100}{7}\right)}{100}$

$$p_{A2} := \frac{7}{50} \quad \textbf{(4.2)}$$

A1 ∩ A2 = {durch 5 und durch 7 teilbar} = {durch 5·7 =35 teilbar} = {35, 70}

$> p_{A12} := \frac{\text{floor}\left(\frac{100}{5 \cdot 7}\right)}{100}$

$$p_{A12} := \frac{1}{50} \quad \textbf{(4.3)}$$

Durch 5 und 7 teilbar minus durch 35 teilbar (da diese ja sonst doppelt gezählt werden)

$> p_{A1} + p_{A2} - p_{A12}$

$$\frac{8}{25} \quad \textbf{(4.4)}$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt $\frac{8}{25}$.

5. KR, Abschnitt 6.1, Aufgabe 25b:

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, beim Lotto „6 aus 52" sechs Richtige zu wählen.

Kombination ohne Wiederholung: C(52, 6) // 52 Zahlen, 6 ziehen

$> restart; with(combinat) :$

$> anzcomb := numbcomb(52, 6)$

$$anzcomb := 20358520 \quad \textbf{(5.1)}$$

$> \frac{1}{anzcomb}$

$$\frac{1}{20358520} \quad \textbf{(5.2)}$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt $\frac{1}{20'358'520}$.

I. KR, Abschnitt 6.1, Aufgabe 37:

Auf welches der beiden Ereignisse sollte man eher wetten (welches Ereignis ist wahrscheinlicher): Augensumme 9 beimWerfen von 2Würfeln oder Augensumme 9 beim Werfen von 3 Würfeln?

a) Augensumme 9 mit 2 Würfeln: (6,3), (5,4), (4,5), (3,6) => 4 Möglichkeiten
Total: $6^2 = 36$

> $a := \frac{4}{6^2}$

$$a := \frac{1}{9} \tag{6.1}$$

> $evalf(a)$

$$0.1111111111 \tag{6.2}$$

b) Augensumme 9 mit 3 Würfel:
(1,2,6), (1,3,5), (1,4,4), (1,5,3), (1,6,2) => 5
(2,1,6), (2,2,5), (2,3,4), (2,4,3), (2,5,2), (2,6,1) => 6
(3,1,5), (3,2,4), (3,3,3), (3,4,2), (3,5,1) => 5
(4,1,4), (4,2,3), (4,3,2), (4,4,1) => 4
(5,1,3), (5,2,2), (5,3,1) => 3
(6,1,2), (6,2,1) => 2
5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 = 25 Möglichkeiten
Total: $6^3 = 216$

> $b := \frac{25}{6^3}$

$$b := \frac{25}{216} \tag{6.3}$$

> $evalf(b)$

$$0.1157407407 \tag{6.4}$$

Die Wahrscheinlichkeit mit 3 Würfeln eine 9 zu würfeln ist etwas grösser.

6. KR, Abschnitt 6.2, Aufgabe 3:

Ein gezinkter Würfel hat die Eigenschaft, dass das Ereignis „werfen einer 2 oder einer 4" dreimal so häufig auftritt, wie das Ereignis „werfen einer 1, 3, 5 oder 6". Wir gehen weiterhin davon aus, dass , „2" und „4" mit gleicher Wahrscheinlichkeit und dass „1", „3", „5" und „6" mit gleicher (aber wohl anderer)Wahrscheinlichkeit fallen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse.

Für 2 oder 4 dreimal so häufig: (2 Möglichkeiten)
$k = 3 \cdot (1 - k)$ [1 = gesamte Wahrscheinlichkeit)
anz: $\frac{k}{anz.\ Möglichkeiten}$

> $restart$

> $a := k = 3 \cdot (1 - k)$

$$a := k = 3 - 3\,k \tag{7.1}$$

> $k := solve(a, k)$

$$\tag{7.2}$$

$$k := \frac{3}{4} \quad (7.2)$$

Für 1 / 3 / 5 / 6: (4 Möglichkeiten)

$\frac{(1-k)}{anz.\ Möglichkeiten}$

> $anz_{1356} := \frac{(1-k)}{4}$

$$anz_{1356} := \frac{1}{16} \quad (7.3)$$

> $anz_{24} := \frac{k}{2}$

$$anz_{24} := \frac{3}{8} \quad (7.4)$$

Für 2 und 4 ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{8}$, für 1,3,5 oder 6 ist sie $\frac{1}{16}$.

7. KR, Abschnitt 6.2, Aufgabe 5:

Wir betrachten ein Paar gezinkter Würfel. Die Wahrscheinlichkeit für eine „4" beim ersten Würfel ist 2/7 und die Wahrscheinlichkeit für eine „3" beim zweiten Würfel ist 2/7. Alle anderen Elementarereignisse beider Würfel treten jeweils mit der wahrscheinlichkeit 1/7 auf. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augensumme 7 auftritt.

Summe 7: (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)

> *restart*

> $p_{16} := \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7}$

$$p_{16} := \frac{1}{49} \quad (8.1)$$

> $p_{25} := \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7}$

$$p_{25} := \frac{1}{49} \quad (8.2)$$

> $p_{34} := \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7}$

$$p_{34} := \frac{1}{49} \quad (8.3)$$

> $p_{43} := \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7}$

$$p_{43} := \frac{4}{49} \quad (8.4)$$

> $p_{52} := \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7}$

$$p_{52} := \frac{1}{49} \quad (8.5)$$

> $p_{61} := \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7}$

$$p_{61} := \frac{1}{49} \quad (8.6)$$

> $total := p_{16} + p_{25} + p_{34} + p_{43} + p_{52} + p_{61}$

$$total := \frac{9}{49} \quad (8.7)$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt $\frac{9}{49}$.

8. KR, Abschnitt 6.2, Aufgabe 11:

Seien E und F Ereignisse mit p(E) = 0.7 und p(F) = 0.5. Beweisen Sie die beiden Ungleichungen p(E ∪ F) ≥ 0.7 und p(E ∩ F) ≥ 0.2.

Es gilt: p(E ∪ F) ≥ p(E) = 0.7 und p(E ∩ F) ≤1

p(E ∪ F) = p(E) + p(F) - p(E ∩ F)
Einsetzen / Umformen:
p(E) + p(F) - p(E ∩ F)
0.7 + 0.5 - p(E ∩ F) ≤ 1
p(E ∩ F) ≥ 0.2

9. KR, Abschnitt 6.2, Aufgabe 21:

Finden Sie die kleinste Anzahl von Leuten, so dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei von ihnen

http://de.wikipedia.org/wiki/Geburtstagsparadoxon

a)

am 1. April Geburtstag feiern, grösser als 1/2 ist und

> $restart; Digits := 5 :$

Wahrscheinlichkeit an genau einem Tag Geburtstag zu haben pro Person: $\frac{1}{365}$

Wahrscheinlichkeit NICHT an diesem Tag Geburtstag zu haben: $q = 1 - \frac{1}{365}$

> $q := 1 - \frac{1}{365} :$

Bei n Personen ist die Wahrscheinlichkeit nicht an diesem Tag Geburtstag zu haben $P = 1 - q^n$

Damit lässt sich ausrechnen, wie viele Personen n man braucht, um eine bestimmte Wahrscheinlichkeit P zu erreichen, dass mindestens eine Person an einem bestimmten Tag Geburtstag hat:

> $gl := \left(1 - \frac{1}{365}\right)^n = 1 - P$

$$gl := \left(\frac{364}{365}\right)^n = 1 - P \quad \textbf{(10.1.1)}$$

> $AnzPersonen := solve(gl, n)$

$$AnzPersonen := \frac{\ln(1-P)}{\ln\left(\frac{364}{365}\right)} \quad \textbf{(10.1.2)}$$

> $P := 0.5$

$$P := 0.5 \quad \textbf{(10.1.3)}$$

> $evalf(AnzPersonen)$

$$252.63 \quad \textbf{(10.1.4)}$$

Es werden mindestens 253 Personen benötigt, dass die Wahrscheinlichkeit grösser als 1/2 das zwei Personen am 1. April Geburtstag haben.

b)

am selben Tag Geburtstag feiern, grösser als 1/2 ist.

Alle Möglichkeiten bei n Personen: $m = 365^n$
1. Person hat 365 Tage zur Auswahl, bei der zweiten sind es nur noch 364, bei der dritten 363 Tage, etc. damit sie nicht am gleichten Tag Geb. haben.

$$u = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1) = \prod_{i=(365-n+1)}^{365} i$$

Somit: $\frac{u}{m} = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n} = \frac{\prod_{i=(365-n+1)}^{365} i}{365^n}$

Die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen doppelten Geburtstag im Verlauf eines Jahres ist somit

$$P = 1 - \frac{u}{m} = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n} = 1 - \frac{\prod_{i=(365-n+1)}^{365} i}{365^n}$$

Durch "ausprobieren" findet man die Zahl 23 wo sich die Wahrscheinlichkeit von ~0.5 ergibt.

> $restart; Digits := 4 :$

> $WahrscheinlichkeitGebAmGleichenTag := n \rightarrow evalf\left(1 - \frac{\prod_{i=(365-n+1)}^{365} i}{365^n}\right)$

$$WahrscheinlichkeitGebAmGleichenTag := n \rightarrow evalf\left(1 - \frac{\prod_{i=366-n}^{365} i}{365^n}\right) \quad \textbf{(10.2.1)}$$

> $WahrscheinlichkeitGebAmGleichenTag(22)$

(10.2.2)

$$0.4757 \tag{10.2.2}$$

> $WahrscheinlichkeitGebAmGleichenTag(23)$

$$0.5073 \tag{10.2.3}$$

> $WahrscheinlichkeitGebAmGleichenTag(24)$

$$0.5383 \tag{10.2.4}$$

Ab 23 Personen ist die Wahrscheinlichkeit grösser als 1/2, dass zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben.

Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

10. KR, Abschnitt 6.2, Aufgabe 23:

Eine faire Münze wird fünfmal geworfen. Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei genau viermal „Kopf" erscheint, falls beim ersten Wurf „Kopf" gefallen ist.

Wurf: K ? ? ? ?

4^2 Möglichkeiten für die restlichen 4 Würfe

Mögliche Kombinationen: KKKKZ, KKKZK, KKZKK, KZKKK => 4 Möglichkeiten

> $Wahrscheinlichkeit := \frac{4}{2^4}$

$$Wahrscheinlichkeit := \frac{1}{4} \tag{11.1}$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt $\frac{1}{4}$.

11. KR, Abschnitt 6.2, Aufgabe 27b:

Eine Familie habe 4 Kinder und wir betrachten die beiden Ereignisse E =„die Familie hat Kinder beider Geschlechter" und F =„die Familie hat höchstens einen Jungen". Sind die beiden Ereignisse unabhängig?

4 Kinder: 4^2 Möglichkeiten
E: beide Geschlechter: (also nicht nur Mädchen oder nicht nur Jungen) 16 - 2 = 14
F: höchstens einen Jungen: (also auch keinen oder eben einen), Möglichkeiten: MMMM, MMMJ, MMJM, MJMM, JMMM => 5 Möglichkeiten

> *restart*

> $p_E := \frac{14}{16}$

$$p_E := \frac{7}{8} \tag{12.1}$$

> $p_F := \frac{5}{16}$

$$p_F := \frac{5}{16} \tag{12.2}$$

Unabhängig, falls p(E ∩ F) = p(E) * p(F)

p(E ∩ F) = $\frac{7}{8}$

> $\frac{7}{8} \cdot \frac{5}{16}$

$$\frac{35}{128} \tag{12.3}$$

$\frac{7}{8} \neq \frac{35}{128}$ ⇒ Die beiden Ereignisse sind <u>nicht</u> unabhängig.

II. KR, Abschnitt 6.2, Aufgabe 28:

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein neugeborenes Kind ein Junge ist, sei 0.51.
Ausserdem wollen wir annehmen, dass Geburten innerhalb einer Familie unabhängige Ereignisse sind.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Familie mit 5 Kindern...

a)

genau drei Jungen hat

Kombination ohne Wiederholung:

> $restart; Digits := 4:$

> $pJunge := 0.51$

$$pJunge := 0.51 \tag{13.1.1}$$

> $pMaedchen := 1 - pJunge$

$$pMaedchen := 0.49 \tag{13.1.2}$$

> $AnzKinder := 5$

$$AnzKinder := 5 \tag{13.1.3}$$

> $AnzJunge := 3$

$$AnzJunge := 3 \tag{13.1.4}$$

> $p := \frac{AnzKinder!}{AnzJunge! \cdot (AnzKinder - AnzJunge)!} \cdot pJunge^{AnzJunge} \cdot pMaedchen^{(AnzKinder - AnzJunge)}$

$$p := 0.3186 \tag{13.1.5}$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 0.3186.

b)

mindestens einen Jungen hat,

mindestens => einen Jungen oder zwei, oder drei oder vier oder fünf Jungen => nur dann wenn es nicht alles Mädchen sind.

> $anzMaedchen := 5$

$$anzMaedchen := 5 \tag{13.2.1}$$

> $1 - pMaedchen^{\mathrm{anzMaedchen}}$

$$0.9718 \tag{13.2.2}$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 0.9718.

c)

mindestens ein Mädchen hat,

=> keine Jungen

> $anzJungen := 5$

$$anzJungen := 5 \tag{13.3.1}$$

> $1 - pJunge^{anzJungen}$

$$0.9655 \tag{13.3.2}$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 0.9655.

d)

nur Kinder gleichen Geschlechts hat.

Alles nur Mädchen + Alles nur Jungen

> $anzMaedchen := 5:$

> $anzJungen := 5:$

> $pMaedchen^{anzMaedchen} + pJunge^{anzJungen}$

$$0.06275 \tag{13.4.1}$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 0.06275.

12. KR, Abschnitt 6.2, Aufgabe 35c:

Ein Bernoulliversuch mit (Einzel)Erfolgswahrscheinlichkeit p wird n-mal durchgeführt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei höchstens ein Misserfolg auftritt.

p=$\binom{Versuche}{Erfolge} \cdot p^{Erfolge-1} \cdot (1-p)^{1\,Misserfolg} = \binom{n}{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot (1-p)^1 = n \cdot p^{n-1} \cdot (1-p)$

p("immer Erfolg") $= p^n$

p("1 Misserfolg") $= n \cdot p^{n-1} \cdot (1-p)$

p("immer Erfolg") + p("1 Misserfolg") $= \boldsymbol{p^n + n \cdot p^{n-1} \cdot (1-p)}$

Satz von Bayes

13.

Aus drei Urnen U1, U2 und U3 wird zufällig eine Urne ausgewählt, wobei jede Urne dieselbe Wahrscheinlichkeit besitzt, in die Auswahl zu gelangen. Die drei Urnen enthalten weisse und schwarze Kugeln, wobei sich in Urne

• U1 : zwei weisse und fünf schwarze
• U2 : vier weisse und vier schwarze
• U3 : sieben weisse und vier schwarze

Kugeln befinden. Aus der zufällig gewählten Urne wird nun eine Kugel gezogen.

Wahrscheinlichkeit pro Urne: P("Urne") = 1/3

> $restart; Digits := 4 :$

> $P_{Urne} := \frac{1}{3}$

$$P_{Urne} := \frac{1}{3} \tag{15.1}$$

> $P_{U1Weiss} := \frac{2}{7}$;
$P_{U1Schwarz} := \frac{5}{7}$

$$P_{U1Weiss} := \frac{2}{7}$$
$$P_{U1Schwarz} := \frac{5}{7} \tag{15.2}$$

> $P_{U2Weiss} := \frac{4}{8}$;
$P_{U2Schwarz} := \frac{4}{8}$

$$P_{U2Weiss} := \frac{1}{2}$$
$$P_{U2Schwarz} := \frac{1}{2} \tag{15.3}$$

> $P_{U3Weiss} := \frac{7}{11}$;
$P_{U3Schwarz} := \frac{4}{11}$

$$P_{U3Weiss} := \frac{7}{11}$$
$$P_{U3Schwarz} := \frac{4}{11} \tag{15.4}$$

a)

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogenen Kugel weiss ist?

P("Weiss aus Urne 1") + P("Weiss aus Urne 2") + P("Weiss aus Urne 3")

> $P_{Urne} \cdot P_{U1Weiss} + P_{Urne} \cdot P_{U2Weiss} + P_{Urne} \cdot P_{U3Weiss}$

$$\frac{73}{154} \tag{15.1.1}$$

> $evalf(\%)$

$$0.4740 \tag{15.1.2}$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 0.4740.

b)

Die gezogene Kugel ist schwarz. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie aus Urne U2 stammt?

> $\dfrac{P_{Urne} \cdot P_{U2Weiss}}{P_{Urne} \cdot P_{U1Schwarz} + P_{Urne} \cdot P_{U2Schwarz} + P_{Urne} \cdot P_{U3Schwarz}}$

$$\frac{77}{243} \tag{15.2.1}$$

> $evalf(\%)$

$$0.3169 \tag{15.2.2}$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 0.3169.

14.

Wir betrachten das Zufallsexperiment, das aus der Übertragung eines Bits auf einem binären Kanal besteht.
Dabei werden die Zeichen 0 und 1 im Verhältnis 3 : 4 gesendet, 0 wird mit der Wahrscheinlichkeit p01 = 0.2 falsch (d.h. als 1) und 1 wird mit der Wahrscheinlichkeit p10 = 0.3 falsch (d.h. als 0) übertragen.

> $restart; Digits := 4 :$

> $p0 := \frac{3}{7}$

$$p0 := \frac{3}{7} \tag{16.1}$$

> $p1 := \frac{4}{7}$

$$p1 := \frac{4}{7} \tag{16.2}$$

> $p01 := \frac{2}{10}$

$$p01 := \frac{1}{5} \tag{16.3}$$

> $p00 := 1 - p01$

$$p00 := \frac{4}{5} \tag{16.4}$$

> $p10 := \frac{3}{10}$

$$p10 := \frac{3}{10} \tag{16.5}$$

> $p11 := 1 - p10$

$$p11 := \frac{7}{10} \tag{16.6}$$

a)

Geben Sie einen geeigneten Raum S der möglichen Ausgänge des Experimentes an.

0 Gesendet => 0 Empfangen * p00
0 Gesendet => 1 Empfangen * p01
1 Gesendet => 0 Empfangen * p10
1 Gesendet => 1 Empfangen * p11

S = {("0 als 0"), ("0 als 1"), ("1 als 0"), ("1 als 1")}

b)

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, eine 0 bzw. eine 1 zu empfangen?

> $p0 \cdot p00 + p1 \cdot p10$

$$\frac{18}{35} \tag{16.2.1}$$

> $evalf(\%)$

$$0.5143 \tag{16.2.2}$$

Wahrscheinlichkeit einen 0 zu empfangen: 18/35, resp. 0.5143.

> $p1 \cdot p11 + p0 \cdot p01$

$$\frac{17}{35} \tag{16.2.3}$$

> $evalf(\%)$

$$0.4857 \tag{16.2.4}$$

Wahrscheinlichkeit einen 1 zu empfangen: 17/35, resp. 0.4857.

c)

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine 0 gesendet wurde, falls Sie eine 0 empfangen haben?

> $\frac{p0 \cdot p00}{p0 \cdot p00 + p1 \cdot p10}$

$$\frac{2}{3} \tag{16.3.1}$$

> $evalf(\%)$

$$0.6667 \tag{16.3.2}$$

Die Wahrscheinlichkeit beträg 2/3, resp. 0.6667.

d)

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine 1 gesendet wurde, falls Sie eine 1 empfangen haben?

> $\frac{p1 \cdot p11}{p1 \cdot p11 + p0 \cdot p01}$

$$\frac{14}{17} \quad (16.4.1)$$

> $evalf(\%)$

$$0.8235 \quad (16.4.2)$$

Die Wahrscheinlichkeit beträg 14/17, resp. 0.8235.

III.

Die Produktion einer Abteilung wird von zwei Kontrolleuren mit den Anteilen 30% bzw. 70% sortiert. Dabei ist für den ersten bzw. zweiten Kontrolleur die Wahrscheinlichkeit dafür, eine Fehlentscheidung zu treffen, gleich 0.03 bzw. 0.05. Es wird beim Versand ein fehlsortiertes Teil gefunden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde es

> $restart; Digits := 4 :$

> $pKont1 := \frac{3}{10}$

$$pKont1 := \frac{3}{10} \quad (17.1)$$

> $pKont2 := \frac{7}{10}$

$$pKont2 := \frac{7}{10} \quad (17.2)$$

> $pKont1Falsch := 0.03$

$$pKont1Falsch := 0.03 \quad (17.3)$$

> $pKont2Falsch := 0.05$

$$pKont2Falsch := 0.05 \quad (17.4)$$

a)

vom zweiten Kontrolleur sortiert?

> $\frac{pKont2 \cdot pKont2Falsch}{pKont2 \cdot pKont2Falsch + pKont1 \cdot pKont1Falsch}$

$$0.7955 \quad (17.1.1)$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 0.7955.

b)

Man bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Teil richtig einsortiert wurde.

> $pKont1 \cdot (1 - pKont1Falsch) + pKont2 \cdot (1 - pKont2Falsch)$

$$0.9560 \quad (17.2.1)$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 0.9560.

Zufallsvariablen

15. KR, Abschnitt 6.4, Aufgabe 3:

Ein Würfel wird zehnmal geworfen. Wieviel Mal erwarten Sie dabei den Ausgang „6”?

> $restart; Digits := 4 :$

> $p6 := \frac{1}{6}$

$$p6 := \frac{1}{6} \tag{18.1}$$

> $10 \cdot p6$

$$\frac{5}{3} \tag{18.2}$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 5/3.

16. KR, Abschnitt 6.4, Aufgabe 11:

Wir wollen einen Würfel höchstens zehnmal werfen, aber dann aufhören, wenn eine „6” erscheint. Bestimmen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der Würfe.

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit das ich zehnmal werfen muss! (Nicht wie gross die Chance ist bei zehnmal werfen eine sechs zu haben...)
=> Nach 9 mal würfeln und keine 6 zu haben müssen wir so oder so ein zehntesmal werfen...

Mögliche Ausgänge / eine Sechs zu haben

1: $\frac{1}{6}$

2: $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$ (zuerst keine 6, dann eine 6)

3: $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)$ (zweimal keine 6, dann eine 6)

4: $\left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)$

5: $\left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)$

6: $\left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)$

7: $\left(\frac{5}{6}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)$

8: $\left(\frac{5}{6}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)$

9: $\left(\frac{5}{6}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)$

10: $\left(\frac{5}{6}\right)^9$ (9 mal keine 6, danach müssen wir so oder so ein 10tes mal werfen...)

Alles zusammenrechnen: (1-9 mittels Summenzeichen, Fall 10 einzeln)

> $restart; Digits := 4 :$

> $\left(\sum_{k=1}^{9} k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)\right) + 10 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{9}$

$$\frac{50700551}{10077696} \tag{19.1}$$

> $evalf(\%)$

$$5.031 \tag{19.2}$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 5.031

17. KR, Abschnitt 6.4, Aufgabe 23:

Eine faire Münze wird zehnmal geworfen. Unsere Zufallsvariable zähle das Ereignis „Kopf".
Bestimmen Sie die Varianz dieser Zufallsvariablen.

Bei Binomialverteilung -> Varianz = n * p * q, wobei q = 1 - p

> $restart; Digits := 4 :$

> $pKopf := \frac{1}{2}$

$$pKopf := \frac{1}{2} \tag{20.1}$$

> $nAnzWurf := 10$

$$nAnzWurf := 10 \tag{20.2}$$

> $var := nAnzWurf \cdot pKopf \cdot (1 - pKopf)$

$$var := \frac{5}{2} \tag{20.3}$$

Die Varianz beträgt 5/2, resp. 2.5.