Reasoning-Übungen (SS3)

Felix Rohrer

Folgen und Summationen

1. KR, Abschnitt 2.4, Aufgabe 1:

Gegeben sei die Zahlenfolge $\{a_n\}$ *mit* $a_n = 2\cdot(-3)^n + 5^n$

> restart

> $f := n \rightarrow 2\cdot(-3)^n + 5^n$

$$f := n \rightarrow 2\ (-3)^n + 5^n \quad \textbf{(1.1)}$$

> $f(0)$

$$3 \quad \textbf{(1.2)}$$

> $f(1)$

$$-1 \quad \textbf{(1.3)}$$

> $f(4)$

$$787 \quad \textbf{(1.4)}$$

> $f(5)$

$$2639 \quad \textbf{(1.5)}$$

2. KR, Abschnitt 2.4, Aufgabe 5d:

Bestimmen Sie die ersten 10 Glieder der Zahlenfolge, deren n-tes Glied gleich $n! - 2^n$ *ist.*

Alternative : $seq(n = n! - 2^n, n = 0..9)$

> restart

> $f := n \rightarrow n! - 2^n$

$$f := n \rightarrow n! - 2^n \quad \textbf{(2.1)}$$

```
> for x from 1 to 10 do
    f(x)
  od
```

-1
-2
-2
8
88
656
4912
40064
362368
3627776 **(2.2)**

3. KR, Abschnitt 2.4, Aufgabe 9c:

Wir betrachten die folgende (Anfangs)sequenz natürlicher Zahlen: 1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, . . .
Bestimmen Sie ein allgemeines Bildungsgesetz für diese Zahlenfolge, d.h. eine Vorschrift der Gestalt $a_n = f(n)$, so dass $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, , ...

Jede zweite Zahl ist 0:
Vorzeichenwechsel: (-1)^n
*0 rechnen: (1 - (-1)^n) => 0, 2, 0, 2, 0...
Für $a_1 = 1$ => (1 - (-1)^n) * 1/2
Für $a_3 = 2$ *und* $a_5 = 4$ *und* $a_7 = 8$ *ist* $\cdot 2^{\mathrm{exp}}$
a3: exp=1
a5: exp=2
a7: exp=3
=> Der Exponent muss in abhängigkeit von n sein: (mittels "probieren" / "suchen")
a3 => 2 * 1 + 1 = 3 (exp: 1)
a5 => 2 * 2 + 1 = 5 (exp: 2)
a7 => 2 * 3 + 1 = 7 (exp: 3)
an => 2 * n + 1 = ...
=> exp: (n - 1)/2
alles zusammen: $\left(1-(-1)^n\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{(n-1)}{2}}$

> *restart*

> $f := n \rightarrow \left(1-(-1)^n\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot 2^{\frac{(n-1)}{2}}$

$$f := n \rightarrow \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(-1)^n\right)2^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}} \qquad \textbf{(3.1)}$$

> **for** x **from** 1 **to** 10 **do**
> $f(x)$
> **od**

1
0
2
0
4
0
8
0
16
0 **(3.2)**

>

4. KR, Abschnitt 2.4, Aufgaben 13a, 13d und 17d:

Bestimmen Sie die Werte der folgenden Summen:

> *restart*

a)

> $\sum_{k=1}^{5} (k+1)$

$$20 \tag{4.1}$$

b)

> $\sum_{j=0}^{8} \left(2^{j+1} - 2^{j}\right)$

$$511 \tag{4.2}$$

c)

> $\sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{3} (i \cdot j)$

$$18 \tag{4.3}$$

5. KR, Abschnitt 2.4, Aufgabe 27:

Bestimmen Sie die Werte der folgenden Produkte:

> *restart*

a)

> $\prod_{i=0}^{10} i$

$$0 \tag{5.1}$$

b)

> $\prod_{i=5}^{8} \mathrm{i}$

$$1680 \tag{5.2}$$

c)

> $\prod_{i=1}^{100} (-1)^{\mathrm{i}}$

$$1 \tag{5.3}$$

d)

> $\prod_{i=1}^{10} 2$

$$1024 \tag{5.4}$$

Vollständige Induktion

6. KR, Abschnitt 4.1, Aufgabe 3:

Für jede positive ganze Zahl n sei P(n) die Aussage $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6}$

a)

Formulieren Sie die Aussage P(1) und überprüfen Sie den Wahrheitsgehalt dieser Aussage. (Induktionsanfang)

$P(1) \Rightarrow 1^2 \quad =?= \quad \frac{1(1+1)\cdot(2\cdot 1+1)}{6}$

```
> restart
> n := 1
```

$$n := 1 \quad \textbf{(6.1.1)}$$

```
> res1 := n^2
```

$$res1 := 1 \quad \textbf{(6.1.2)}$$

```
> res2 := n·(n+1)·(2·n+1)/6
```

$$res2 := 1 \quad \textbf{(6.1.3)}$$

```
> res1 - res2
```

$$0 \quad \textbf{(6.1.4)}$$

⇒ wahr

b)

Formulieren Sie die Induktionsvoraussetzung.

$$\frac{\mathbf{k\cdot(k+1)\cdot(2\cdot k+1)}}{\mathbf{6}}$$

c)

Führen Sie den Induktionsschritt aus.

$P(n) \equiv \left(1^2+2^2+\ldots+k^2=\frac{k\cdot(k+1)\cdot(2\cdot k+1)}{6}\right)$

$P(n+1) \equiv \left(1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)\cdot((k+1)+1)\cdot(2\cdot(k+1)+1)}{6}\right.$

Zu zeigen: $P(n) \rightarrow P(n+1)$ *wahr*

linker teil : (manuel)

$1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2$

$=\frac{k(k+1)\cdot(2k+1)}{6}+(k+1)^2$

$=\frac{k(k+1)\cdot(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$

$=\frac{k(2k^2+3k+1)+6(k^2+2k+1)}{6}$

$$= \frac{2\,k^3 + 3\,k^2 + \mathrm{k} + 6\,k^2 + 12\,k + 6}{6}$$

$$= \frac{2\,k^3 + 9\,k^2 + 13\,k + 6}{6}$$

> $factor\left(\frac{2 \cdot k^3 + 9 \cdot k^2 + 13 \cdot k + 6}{6}\right)$

$$\frac{1}{6}\,(2\,k+3)\,(k+2)\,(k+1) \qquad \textbf{(6.3.1)}$$

linker teil mit Maple

> $factor\left(\frac{k \cdot (k+1) \cdot (2 \cdot k+1)}{6} + (k+1)^2\right)$

$$\frac{1}{6}\,(2\,k+3)\,(k+2)\,(k+1) \qquad \textbf{(6.3.2)}$$

rechter teil: (manuel)

$$\frac{(k+1) \cdot ((k+1)+1) \cdot (2 \cdot (k+1)+1)}{6}$$

$$= \frac{(k+1) \cdot (k+2) \cdot (2\,k+3)}{6}$$

> $factor\left(\frac{(k+1) \cdot (k+2) \cdot (2\,k+3)}{6}\right)$

$$\frac{1}{6}\,(2\,k+3)\,(k+2)\,(k+1) \qquad \textbf{(6.3.3)}$$

rechter teil mit Maple:

> $factor\left(\frac{(k+1) \cdot ((k+1)+1) \cdot (2 \cdot (k+1)+1)}{6}\right)$

$$\frac{1}{6}\,(2\,k+3)\,(k+2)\,(k+1) \qquad \textbf{(6.3.4)}$$

Linkter und rechter Teil ist gleich ⇒ wahr

d)

Erklären Sie in eigenen Worten warum Induktionsanfang und Induktionsschritt beweisen, dass P (n) für jede positive ganze Zahl n wahr ist.

Mit dem Induktionsanfang wird bewiesen, dass P(1) gilt.
Mit dem Induktionsschritt wird bewiesen, dass P(k) und somit auch P(k+1) gilt.
Somit gilt dies dann für alle positive ganzen Zahlen.

I. KR, Abschnitt 4.1, Aufgabe 5:

Beweisen Sie die folgende Aussage: Für jede nicht negative ganze Zahl n gilt

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2\,n+1)^2 = \sum_{k=0}^{n} (2\,k+1)^2 = \frac{(n+1)(2\,n+1)(2\,n+3)}{3}$$

Induktionsbasis:

$$P(1) = 1^2 \quad =?= \quad \frac{(n+1)\cdot(2\cdot n+1)\cdot(2\cdot n+3)}{3}$$

> $restart$

> $f1 := n \rightarrow sum\left((2\cdot i+1)^2, i=0..n\right)$

$$f1 := n \rightarrow \sum_{i=0}^{n} (2\,i+1)^2 \tag{7.1}$$

> $f2 := n \rightarrow \frac{(n+1)\cdot(2\cdot n+1)\cdot(2\cdot n+3)}{3}$

$$f2 := n \rightarrow \frac{1}{3}\,(n+1)\,(2\,n+1)\,(2\,n+3) \tag{7.2}$$

> $f1(0)$

$$1 \tag{7.3}$$

> $f1(0)$

$$1 \tag{7.4}$$

> $f2(1)$

$$10 \tag{7.5}$$

> $f2(1)$

$$10 \tag{7.6}$$

Induktionsbasis ⇒ wahr

Induktionsvorschrift:
$P(\mathrm{n}) \rightarrow P(n+1)$ wahr?

$$\mathrm{P(n)} \equiv \left(\sum_{k=0}^{n} (2\cdot k+1)^2 = \frac{(k+1)(2\,\mathrm{k}+1)(2\,k+3)}{3}\right)$$

$$\mathrm{P(n+1)} \equiv \left(\sum_{k=0}^{n} (2\cdot k+1)^2 + (2\cdot k+1+1)^2 = \frac{((k+1)+1)(2\cdot(\mathrm{k}+1)+1)(2\cdot(k+1)+3)}{3}\right)$$

> $restart$

> $f3 := \frac{(k+1)\cdot(2\cdot k+1)\cdot(2\cdot k+3)}{3} + (2\cdot(k+1)+1)^2$

$$f3 := \frac{1}{3}\,(k+1)\,(2\,k+1)\,(2\,k+3) + (2\,k+3)^2 \tag{7.7}$$

> $f4 := \frac{((k+1)+1)\cdot(2\cdot(k+1)+1)\cdot(2\cdot(k+1)+3)}{3}$

$$f4 := \frac{1}{3}\,(k+2)\,(2\,k+3)\,(2\,k+5) \tag{7.8}$$

> $factor(f3)$

$$\frac{1}{3}\ (k+2)\ (2\ k+3)\ (2\ k+5) \tag{7.9}$$

> $factor(f4)$

$$\frac{1}{3}\ (k+2)\ (2\ k+3)\ (2\ k+5) \tag{7.10}$$

Linkter (f3) und rechter Teil (f4) ist gleich $\Rightarrow$ wahr

Test:

> $fn1 := unapply(f3, k)$

$$fn1 := k \rightarrow \frac{1}{3}\ (k+1)\ (2\ k+1)\ (2\ k+3) + (2\ k+3)^2 \tag{7.11}$$

> $fn2 := unapply(f4, k)$

$$fn2 := k \rightarrow \frac{1}{3}\ (k+2)\ (2\ k+3)\ (2\ k+5) \tag{7.12}$$

> $fn1(5)$

$$455 \tag{7.13}$$

> $fn2(5)$

$$455 \tag{7.14}$$

Rekursiv definierte Funktionen

7. KR, Abschnitt 4.3, Aufgaben 1b, 3a:

Bestimmmen Sie f(2), f(3), f(4) und f(5) falls

a) f(0) = 1 und f(n + 1) = 3f(n)

$f(0) = 1$
$f(1) = 3 \cdot f(0) = 3 \cdot 1 = 3$
$f(2) = 3 \cdot f(1) = 3 \cdot 3 = \mathbf{9}$
$f(3) = 3 \cdot f(2) = 3 \cdot 9 = \mathbf{27}$
$f(4) = 3 \cdot f(3) = 3 \cdot 27 = \mathbf{81}$
$f(5) = 3 \cdot f(4) = 3 \cdot 81 = \mathbf{243}$

b) f(0) = -1, f(1) = 2 und f(n + 1) = f(n) + 3f(n - 1)

```
> restart
> Aufg7b :=proc(a)
   if a = 0 then return -1
   elif a = 1 then return 2
   else return Aufg7b(a − 1) + 3·Aufg7b(a − 2)
   end if
   end proc;
Aufg7b := proc(a)                                            (8.2.1)
    if a = 0 then
        return −1
    elif a = 1 then
        return 2
    else
        return Aufg7b(a − 1) + 3 * Aufg7b(a − 2)
    end if
end proc
> Aufg7b(0)
                              -1                             (8.2.2)
> Aufg7b(1)
                              2                              (8.2.3)
> Aufg7b(2)
                              -1                             (8.2.4)
> Aufg7b(3)
                              5                              (8.2.5)
> Aufg7b(4)
                              2                              (8.2.6)
> Aufg7b(5)
                              17                             (8.2.7)
>
```

8. KR, Abschnitt 4.3, Aufgabe 7b:

Geben Sie die rekursive Definition der Zahlenfolge $\{a_n\}$ an, falls $a_n = 2\,n + 1$ für alle n = 1, 2, 3, . . .

f(1), f(2), f(3), f(4) usw, mit der gegebenen Vorschrift berechnen:
$f(1) = 2 \cdot n + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$
$f(2) = 2 \cdot n + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$
$f(3) = 2 \cdot n + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$
$f(4) = 2 \cdot n + 1 = 2 \cdot 4 + 1 = 9$
$f(5) = 2 \cdot n + 1 = 2 \cdot 5 + 1 = 11$

Die Folge lautet: 3, 5, 7, 9, 11 ==> vorhergehendes Resultat + 2
$f_{n+1} = f_n + 2$

$\boldsymbol{a_0 \quad = \; 3}$
$\boldsymbol{a_{n+1} = \; a_n + 2}$

II. KR, Abschnitt 4.3, Aufgaben 12, 13:

Zeigen Sie, dass die Fibonacci-Zahlen f_k folgende Eigenschaften haben:

a) $\forall\; n \in \mathbb{N}\; \left(f_1^2 + f_2^2 + ... + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}\right)$

Basis:
P(1) ≡ $\left(f_1^2 \;=?=\; f_1 \cdot f_2\right)$

```
> restart
> with(combinat, fibonacci)
```

$[\,fibonacci\,]$ **(10.1.1)**

```
> #einzelne Fibonacci Zahl, z.B. 5: fibonacci(5)
> seq(fibonacci(x), x = 0..10)
```

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 **(10.1.2)**

```
>
> f1 := x→fibonacci(x)^2
```

$f1 := x \rightarrow combinat\text{:-}fibonacci(x)^2$ **(10.1.3)**

```
> f2 := x→fibonacci(x)·fibonacci(x + 1)
```

$f2 := x \rightarrow combinat\text{:-}fibonacci(x)\; combinat\text{:-}fibonacci(x+1)$ **(10.1.4)**

```
> f1(1)
```

1 **(10.1.5)**

```
> f2(1)
```

1 **(10.1.6)**

=> Basis ist wahr

Induktionsvorschrift:
$P(k) \;\rightarrow\; P(k+1)\; wahr?$
$P(k) = \left(f_1^2 + f_2^2 + ... + f_k^2 = f_k \cdot f_{k+1}\right)$
$P(k+1) = \left(f_1^2 + f_2^2 + ... + f_k^2 + f_{k+1}^2 = f_{k+1} \cdot f_{k+2}\right)$

> $f3 := f_k \cdot f_{k+1} + f_{k+1}^2$

$$f3 := f_k f_{k+1} + f_{k+1}^2 \quad \textbf{(10.1.7)}$$

> $f4 := f_{k+1} \cdot f_{k+2}$

$$f4 := f_{k+1} f_{k+2} \quad \textbf{(10.1.8)}$$

> $factor(f3)$

$$f_{k+1} \left(f_{k+1} + f_k\right) \quad \textbf{(10.1.9)}$$

> $factor(f4)$

$$f_{k+1} f_{k+2} \quad \textbf{(10.1.10)}$$

Spezialfall Fibonacci Zahl: $f_k + f_{k+1} = f_{k+2}$

=> Vorschrift ist wahr

b) $\forall\ n \in \mathbb{N} \left(f_1 + f_3 + ... + f_{2n-1} = f_{2n}\right)$

> $restart$

> $with(combinat, fibonacci)$

$$[fibonacci] \quad \textbf{(10.2.1)}$$

> $seq(fibonacci(x), x = 0..10)$

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 \quad \textbf{(10.2.2)}$$

$f(0) = 0$
$f(1) = 1$
$f(2) = 2$
Basis:
$f(1) = f(2) \quad \Rightarrow \quad 1 = 1$

=> Basis ist wahr

Vorschrift:
$P(k) = \left(f_1 + f_3 + ... + f_{2\cdot k-1} = f_{2\cdot k}\right)$
$P(k+1) = \left(f_1 + f_3 + ... + f_{2\cdot k-1} + f_{2\cdot k+1} = f_{2\cdot k+2}\right)$

linker teil:
$= f_1 + f_3 + ... + f_{2\cdot k-1} + f_{2\cdot k+1}$
$= f_{2\cdot k} + f_{2\cdot k+1}$
$= f_{2\cdot(k+1)}$

rechter teil:
$= f_{2\cdot k+2}$
$= f_{2\cdot(k+1)}$

Linkter und rechter Teil ist gleich $\Rightarrow$ wahr

Test:

> $fibonacci(1) + fibonacci(3) + fibonacci(5) + fibonacci(7) + fibonacci(9)$

$$55 \quad \textbf{(10.2.3)}$$

> $fibonacci(10)$

$$55 \quad \textbf{(10.2.4)}$$

Rekursive Algorithmen

9. KR, Abschnitt 4.4, Aufgabe 9:

Beschreiben Sie einen rekursiven Algorithmus, der die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen berechnet.

Bsp: n = 5
1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25

(n-1)'te ungerade Zahlen:
1 + 3 + 5 + 7 + (2n - 1)
n'te ungerade Zahl:
1 + 3 + 5 + 7 + (2n - 1) + (2n - 1)
Summe: (n-1)'te ungerade Zahlen + n'te ungerade Zahl

```
> restart
> SummeUngeradeZahlen := proc(n)
    if n = 1 then return 1
    else return SummeUngeradeZahlen(n − 1) + (2·n − 1)
    end if
    end proc
```

$SummeUngeradeZahlen := \mathbf{proc}(n)$ **(11.1)**

$\quad \mathbf{if}\ n = 1\ \mathbf{then\ return}\ 1\ \mathbf{else\ return}\ SummeUngeradeZahlen(n-1) + 2*n - 1\ \mathbf{end\ if}$

end proc

```
> SummeUngeradeZahlen(5)
```

$$25 \quad \textbf{(11.2)}$$

10. KR, Abschnitt 4.4, Aufgabe 13:

Beschreiben Sie einen rekursiven Algorithmus, der für jeweils zwei beliebige natürliche Zahlen n und m den Ausdruck n! mod m berechnet.

Bsp: 5, 7
5! = 120
120 mod 7 = 17 * 7 + 1 => 1

```
> restart
> FakultaetMod :=proc(n, m)
    if n = 1 then return 1
    else return (n·FakultaetMod(n − 1, m)) mod m
    end if
    end proc
```

$FakultaetMod := \mathbf{proc}(n, m)$ **(12.1)**

$\quad \mathbf{if}\ n = 1\ \mathbf{then\ return}\ 1\ \mathbf{else\ return}\ mod(n * FakultaetMod(n-1, m), m)\ \mathbf{end\ if}$

end proc

```
> FakultaetMod(5, 7)
```

$$1 \quad \textbf{(12.2)}$$

11. KR, Abschnitt 4.4, Aufgabe 15:

Für alle nicht negativen ganzen Zahlen a und b (mit a < b) gilt ggT(a, b) = ggT(a, b - a).
Nutzen Sie diese Tatsache, um einen rekursiven Algorithmus zu konstruieren, der den grössten gemeinsamen Teiler von zwei nicht negativen ganzen Zahlen bestimmt.

```
> restart
> ggT := proc(a, b)
    if a = 0 then return b
    elif a = (b - a) then return a
    elif a < (b - a) then return ggT(a, b - a)
    else return ggT(b - a, a)
    end if
    end proc
```

```
ggT := proc(a, b)
    if a = 0 then
        return b
    elif a = b - a then
        return a
    elif a < b - a then
        return ggT(a, b - a)
    else
        return ggT(b - a, a)
    end if
end proc
```
(13.1)

```
> ggT(6, 26)
```

$$2 \qquad \textbf{(13.2)}$$

Korrekte Programme

12. KR, Abschnitt 4.5, Aufgabe 1:

Beweisen Sie, dass das Programmsegment
    y := 1
    z := x + y
bezüglich der Anfangsbedingung x = 0 und der Endbedingung z = 1 (teilweise) korrekt ist.

Input: x=0
Output: z=1
Programm: y := 1; z := x + y
Einsetzen: z := 0 + 1

Output sollte 1 sein, z ist 1 => Programm ist (teilweise) korrekt.

III. KR, Abschnitt 4.5, Aufgabe 1:

Beweisen Sie, dass das Programmsegment
    x := 2
    z := x + y
    if y > 0 then z := z + 1 else z := 0
bezüglich der Anfangsbedingung y = 3 und der Endbedingung z = 6 (teilweise) korrekt ist.

Input: y=3
Output: z=6
Einsetzen / Programm abarbeiten:
z := 2 + 3 = 5
3>0 then z := 5 + 1 = 6

Output sollte 6 sein, z ist 6 => Programm ist (teilweise) korrekt.